目　录

第一章 随机过程的一般理论

§1.1 随机过程的基本概念

初等概率论所研究的随机现象，基本上可由一个或有限多个随机变量来描述。虽然在那里也考虑了随机变量序列，但假定它们是相互独立的。在实际中，我们还要研究一些随机现象的发展和变化过程，而且所考虑的随机事件要涉及无限（非可列）多个随机变量。这时，我们就需要用一族随机变量才能刻划这种随机现象的全部统计规律性。通常我们把一族随机变量称为随机过程。

例 1 在研究生物群体的增长问题时，为了描述群体的发展或演变过程，就要在每一时刻 t 记录群体的含量（个数）x_t，每一 x_t 是随机变量，假设我们从 $t=0$ 开始连续地观测，则 $\{x_t, t\in[0, \infty)\}$ 就是随机过程。

例 2 在海浪分析中，需要观测在固定点上海平面的垂直振动。设 x_t 表示在固定点上，于时刻 t 海平面相对于平均平面的高度，则 x_t 是随机变量，而 $\{x_t, t\in[0, \infty)\}$ 是随机过程。

例 3 在地震预报中，若每半年统计一次发生在某区域的地震的最大震级，令 x_n 表示第 n 次统计所得的值，则 x_n 是随机变量。为了预测该区未来地震的强度，我们就要研究随机过程 $\{x_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 的统计规律性。

下面我们给出随机过程的正式定义。

（一）随机过程的定义

定义 1 设给定参数集合 T 和可测空间 $(E, \mathscr{B})$，若对每个

$t\in T$，有一个定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的$\mathscr{B}$可测函数$x_t(\omega)$，$\omega\in\Omega$，与它对应，则称依赖于参数 t 的可测函数集合

$$\{x_t(\omega),\quad t\in T\} \tag{1}$$

为定义在（Ω，$\mathscr{F}$，P）上取值于（E，$\mathscr{B}$）中的**随机过程**；或简称为**随机过程**（如（E，$\mathscr{B}$）已明确固定）。（E，$\mathscr{B}$）称为**状态空间**或**相空间**。E中的元素称为**状态**。

如不引起混淆，常把（1）简写成$\{x_t\}$。

称$\{x_t\}$为**实（复）值随机过程**，若E为实数（复数）集，$\mathscr{B}$是E中Borel可测集全体。如果（E，$\mathscr{B}$）=(R_n，$\mathscr{B}_n$)，(R_n——n维欧氏空间，$\mathscr{B}_n$——R_n中Borel可测集全体)，就称$\{x_t\}$为**n维随机过程**。

注意，随机过程的参数t可以指通常的时间，也可以指别的。例如t指高度，x_t表示高度为t的气温。t也可以是向量，例如t指空间的点，而x_t表示在这点的风速等等。这种依赖于几个参数的随机过程（即t是向量的过程）称为**随机场**。随机过程的状态空间中的E可以是任一抽象的集合。E中的状态可以代表某种数量（例如在例1中的状态表示生物群体的个数，在例2中的状态是海浪的高度，在例3中的状态是地震的震级等），也可以指非数量（例如在天气预报中，E中的状态是晴、阴、雨。在观测某随机试验时，E是试验的各种可能结果的集合等）。

为叙述简单起见，我们以后总设$T\subset(-\infty,\ \infty)$，并把$t$理解为时间。如不特别声明，我们考虑的随机过程均指实值的，即(E，$\mathscr{B}$)=(R_1，$\mathscr{B}_1$)。

由随机过程的定义知，对每一固定的$t\in T$，$x_t(\omega)$是定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的随机变量，对每一固定的$\omega\in\Omega$，$x_t(\omega)$是定义在T上的实值函数。我们称这函数为随机过程$\{x_t,\quad t\in T\}$对应于此ω的一个**样本函数**（或**轨道**，或**现实**）。有时我们需要把$x_t(\omega)$看成（t，ω）的二元函数，这时常把$x_t(\omega)$写成$x(t,\ \omega)$。

根据参数集T及状态空间E是可列集或非可列集，可把随机过程分为四种：

1° T及E都可列，

2° T可列，E非可列，

3° T及E都非可列，

4° T非可列，E可列。

参数集T可列（即1°，2°的情形）的随机过程，也称为**随机序列**，或**时间序列**。状态空间E可列（即1°，4°的情形）的随机过程也称为**可列过程**（或**有限过程**，如E是有限集）。

随机过程的分类，除上述按集T与E是可列与否外，还可进一步依据x_t之间的概率关系进行分类。下面是按后者分类的几种研究得较多且用途较广的随机过程类型。

1．**马尔科夫过程**（见第三、四章）。**独立增量过程**，也称为**可加过程**（见第六章）是马尔科夫过程的重要子类。

2．**平稳过程**（见第七章）。

3．**鞅**（见第五章）。

（二）随机过程的分布函数及其特征

设$\{x_t,\ t\in T\}$是随机过程，对任意$t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$及$(c_1, \cdots, c_n)\in R_n$，记随机变量$x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}$的$n$维联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(c_1, c_2, \cdots, c_n)=P(x_{t_1}\leqslant c_1, x_{t_2}\leqslant c_2, \cdots, x_{t_n}\leqslant c_n), \tag{1}$$

当n和t_i变动时，得一族分布函数

$$\boldsymbol{F}=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1, \cdots, c_n),\ n=1,2,\cdots t_i\in T\}, \tag{2}$$

称$\boldsymbol{F}$为随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$的**有限维分布函数族**。

分布函数族$\boldsymbol{F}$具有下列性质（称为相容性条件）：

（A）对1，2，…，n的任意排列$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1, \cdots, c_n)=F_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(c_{\alpha_1}, \cdots, c_{\alpha_n});$$

（B）如$m<n$，则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(c_1, \cdots, c_m)$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(c_1, \cdots, c_m, \infty, \cdots, \infty).$$

有限维分布函数族满足条件（A），（B）的随机过程的存在性，由下面的定理保证。

定理 1 设已给参数集T及满足相容性条件（A），（B）的分布函数族（2），则必存在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及定义在其上的随机过程$\{x_t, t\in T\}$，使对任意自然数n，任意实数c_i及任意$t_i\in T$，$i=1, 2, \cdots, n$，有

$$P(x_{t_1}\leqslant c_1, \cdots, x_{t_n}\leqslant c_n)=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1, \cdots, c_n). \quad (3)$$

证明 取（Ω，$\mathscr{F}$）为无穷维波雷耳（Borel）可测空间(R_1^T，$\mathscr{B}_1^T$)，亦即

$\Omega=R_1^T=\{$定义在T上的实值函数$\lambda(t)$全体$\}$，

$\mathscr{F}=\mathscr{B}_1^T=R_1^T$中包含一切形如（$\lambda(\cdot)$：$\lambda(t_1)\leqslant c_1, \cdots, \lambda(t_n)\leqslant c_n$)的集的最小$\sigma$代数，其中$t_i\in T$，$-\infty<c_i<\infty$任意，$i=1, \cdots, n$，$n\geqslant 1$。$c_i$可取$\infty$，但此时$\lambda(t_i)\leqslant c_i$要换成$\lambda(t_i)<c_i$。

根据测度论中关于在无穷维空间（R_1^T，$\mathscr{B}_1^T$）上产生测度的柯尔莫果洛夫（Колмогоров）扩展定理❶，以及分布函数族（2）满足相容性条件的假定，可知$\boldsymbol{F}$可产生唯一的、定义在$\mathscr{B}_1^T$上的概率测度P_F，使得对任意$t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$及实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，

$$P_F(\lambda(\cdot):\lambda(t_1)\leqslant c_1, \cdots, \lambda(t_n)\leqslant c_n)$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1, c_2, \cdots, c_n). \quad (4)$$

取$P=P_F$，在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上定义随机过程$\{x_t(\omega), t\in T\}$如下：

对任一$\omega\in\Omega$，令

$$x_t(\omega)=\lambda(t), \text{ 如 } \omega=\lambda(\cdot). \quad (5)$$

---

❶ 参看［1］附篇定理4。

换言之，x_t 在"点" $\omega=\lambda(\cdot)$ 的值等于函数 $\lambda(\cdot)$ 在 t 点的值。容易看出，$x_t(\omega)$ 是随机变量，且如上定义的 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及 $\{x_t,\ t\in T\}$ 满足定理的要求（3）。实际上

$$(\omega:x_{t_1}(\omega)\leqslant c_1,\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega)\leqslant c_n)=(\lambda(\cdot):\lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n)\in\mathscr{B}^T=\mathscr{F}.$$

其次由（5）及（4）知

$$\begin{aligned}P(\omega:x_{t_1}(\omega)\leqslant c_1,\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega)\leqslant c_n)&=P_F(\lambda(\cdot):\lambda(t_1)\leqslant c_1,\ \cdots,\ \lambda(t_n)\leqslant c_n)\\&=F_{t_1,\cdots,t_n}(c_1,\ \cdots,\ c_n).\end{aligned}$$

在实际中，要知道随机过程的全部有限维分布函数是很困难的。而且涉及多维分布函数的计算也很烦杂，因此，在多数应用中，只限于给出随机过程的某些统计特征来代替 F，这与概率论中用随机变量的数学期望和方差等来代替分布函数一样。随机过程 $\{x_t,\ t\in T\}$ 最有用的特征是**均值函数** $m(t)$ 及**协方差函数** $K(s,\ t)$。其定义为

$$\begin{aligned}m(t)&=Ex_t,\quad t\in T,\\K(s,\ t)&=E(x_s-m(s))(x_t-m(t))\\&=Ex_sx_t-m(s)m(t),\quad s,\ t\in T.\end{aligned}\tag{6}$$

称 $D(t)=K(t,\ t)$，$t\in T$ 为 $\{x_t\}$ 的**方差函数**。特别对正态随机过程（见第二章），$m(t)$，$K(s,\ t)$ 完全决定 F。

如果 $\{x_t\}$ 是复值随机过程，（6）要改为

$$\begin{aligned}K(s,\ t)&=E(x_s-m(s))\overline{(x_t-m(t))}\\&=Ex_s\bar{x}_t-m(s)\overline{m(t)},\end{aligned}\tag{7}$$

$$D(t)=E|x_t-m(t)|^2,\tag{8}$$

其中符号 $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数。由 Cauchy-Schwarz 不等式知，如 $E|x_t|^2<\infty$，$t\in T$。则 $m(t)$ 及 $K(s,\ t)$ 都存在。

定理 2 设 $\{x_t,\ t\in T\}$ 为复值随机过程，且 $E|x_t|^2<\infty$，$t\in$

T，则$K(s,t)$有性质

（a）对称性：$K(t,s)=\overline{K(s,t)}$；

（b）非负定性：对任意$t_i\in T$及任意复数a_i，$i=1,2,\cdots,n$有

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j\geqslant 0\,. \qquad (9)$$

证明（a）

$$\overline{K(s,t)}=E\overline{\{(x_s-m(s))(\overline{x_t-m(t)})\}}$$
$$=E(x_t-m(s))(x_s-m(t))$$
$$=K(t,s).$$

（b）

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j$$
$$=E\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))\overline{(x_{t_j}-m(t_j))}a_i\bar{a}_j\right\}$$
$$=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))a_i\right\}\overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_{t_j}-m(t_j))a_j\right\}}\right]$$
$$=E\left|\sum_{i=1}^{n}(x_{t_i}-m(t_i))a_i\right|^2\geqslant 0\,.$$

上面是先给$\{x_t\}$，后有$m(t)$及$K(s,t)$且满足（a），（b）。反过来的问题见第二章定理3。

习　题

1. 设已给n维分布函数$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，证明存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的随机变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使它们的联合分布函数为$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。

2. 设已给一维分布函数列$\{F_n(\lambda),\ n=1,2,\cdots\}$。造一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的一列随机变量$\{x_n,\ n=1,2,\cdots\}$，使$x_n$相互独立且$x_n$的分布函数为$F_n(\lambda)$。

3. 设$K(s,t)$为复值随机过程$\{x_t, \ t\in T\}$的协方差函数，$f(t)$，$t\in T$是普通的复值函数，求随机过程$\{x_t+f(t), \ t\in T\}$的协方差函数。

4. 设ξ，η为同分布的随机变量，其均值为零，方差为σ^2。若$E(\xi\eta)=0$，试求随机序列

$$x_n=\xi\cos(\omega n)+\eta\sin(\omega n), \quad n=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

的均值及协方差函数。

5. 设$\{x_t, \ t\in T\}$及$\{y_t, \ t\in T\}$为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机过程，其协方差函数分别为$K_1(s,t)$及$K_2(s,t)$。证明

(i) $K_1(s,t)+K_2(s,t)$，

(ii) $K_1(s,t)K_2(s,t)$

也是某随机过程的协方差函数。

提示 由题3不妨设$Ex_t=Ey_t=0$。造$(\Omega\times\Omega, \ \mathscr{F}\times\mathscr{F}, \ P\times P)$并在其上定义$\xi_t(\omega)=x_t(\omega_1)$，$\eta_t(\omega)=y_t(\omega_2)$，其中$\omega=(\omega_1, \ \omega_2)$，$\omega_i\in\Omega$，$i=1,2$则$\{\xi_t+\eta_t\}$及$\{\xi_t\eta_t\}$的协方差函数分别为(i)和(ii)。

6. 设$f_n(t)$，$t\in(-\infty, \ \infty)$，$n=1,2,\cdots$为复值函数列，定义

$$K(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\overline{f_n(t)}.$$

试证若右方级数对一切s，t绝对收敛，则$K(s,t)$具有对称性及非负定性。

§1.2 随机过程的可分性与可测性

(一) 可分性

研究随机过程样本函数的性质，例如连续性、可微分或有界性时，常要遇到类似下面的非有限又非可列个事件的交

$$B=(\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} x_t(\omega)\leqslant c)$$

$$=\bigcap_{t\in[a,b]}(\omega: x_t(\omega)\leqslant c). \tag{1}$$

由于概率空间$(\Omega, \ \mathscr{F}, \ P)$中的$\sigma$代数$\mathscr{F}$只保证对可列多个事

件的并或交封闭，故B是否仍属于$\mathscr{F}$就成问题。如$B\notin\mathscr{F}$，就无法讨论B的概率。如扩大$\mathscr{F}$使$B\in\mathscr{F}$，自然还希望事件B应能由过程的有限维分布函数完全决定，换言之，如二过程$\{x_t,\ t\in[a,\ b]\}$与$\{y_t,\ t\in[a,\ b]\}$有相同的有限维分布函数族。那么由$\{x_t\}$与$\{y_t\}$决定的事件B应有相同的概率。然而，下例说明并非始终如此。

例1 设$\Omega=[0,\ 1]$，$\mathscr{F}=[0,1]$上的勒贝格可测集所成的σ代数。P是$\mathscr{F}$上的勒贝格测度。定义

$x_t(\omega)=0$，对一切$t\in[0,\ 1]$及$\omega\in\Omega$。

$$y_t(\omega)=\begin{cases}1, & \text{如 } t=\omega,\\ 0, & \text{如 } t\neq\omega,\quad t\in[0,\ 1],\quad \omega\in\Omega.\end{cases}$$

易见，对每一t，$P(\omega: x_t(\omega)=y_t(\omega))=P(\omega:\omega\neq t)=1$，从而$\{x_t\}$与$\{y_t\}$具有相同的有限维联合分布。但是

$$P\left(\omega: \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}x_t(\omega)\leqslant\frac{1}{2}\right)=1,\quad P\left(\omega: \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}y_t(\omega)\leqslant\frac{1}{2}\right)=0.$$

为了避免上述问题，在随机过程的样本函数分析中，就要对过程的样本函数施加某种“光滑性”条件，使得如同（1）中那种涉及非可列多个随机变量的ω集，能用只涉及可列个随机变量的事件来“代替”。为此，下面引进可分性的概念。

为了叙述简便，以下总假定$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$是完备的概率空间，参数集$T$是区间，所讨论的过程允许取$\pm\infty$为值，但恒设对每个$t$，有

$$P(x_t=\pm\infty)=0.$$

定义1 称随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$为**可分的**，如存在T的可列稠密子集R及概率为零的集N，使对任一$\omega\notin N$，样本函数$x(\cdot,\ \omega)$具有下述性质：对任一$t\in T$，存在点列$r_n\in R$满足

$$\lim_{n\to\infty}r_n=t \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}x_{r_n}(\omega)=x_t(\omega),$$

称上述集R为$\{x_t\}$的**可分集**。N为（关于R的）例外集。

有时为了强调R，此时也称$\{x_t\}$关于R可分。

称随机过程$\{x_t, t\in T\}$为**完全可分的**，如$\{x_t\}$关于T的任意可列稠密子集R都可分。

例 2 **连续随机过程**，即样本函数连续的过程，它是完全可分的。例1中的随机过程$\{y_t, t\subset[0, 1]\}$是不可分的。

回顾（1）式中的集B，如设$\{x_t\}$可分，R为其可分集，并考虑如下的事件：

$$\hat{B}=(\omega:\sup_{r\in R}x_r(\omega)\leqslant c)$$
$$=\bigcap_{r\in R}(\omega:x_r(\omega)\leqslant c)\in\mathscr{F},$$

由可分性有$B\doteq\hat{B}$，$\doteq$表示左、右两边最多相差一零测集（它是例外集N的子集）。因$\mathscr{F}$完备，所以$B\in\mathscr{F}$，于是解决了B可能不属于$\mathscr{F}$的问题。

定义 2 定义在同一$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的两个随机过程$\{x_t, t\in T\}$与$\{y_t, t\in T\}$称为随机等价的，并记为$\{x_t\}\sim\{y_t\}$，如对每一$t\in T$，有

$$P(x_t=y_t)=1. \tag{2}$$

由（2）可知，如$\{x_t\}\sim\{y_t\}$，则它们具有相同的有限维联合分布，即对任意$t_i\in T$及实数c_i，$i=1, 2, \cdots, n$，有

$$P(x_{t_i}\leqslant c_i, 1\leqslant i\leqslant n)=P(y_{t_i}\leqslant c_i, 1\leqslant i\leqslant n).$$

Doob证明了任一随机过程总可以把它可分化。即对任一随机过程$\{x_t, t\in T\}$，必存在与它随机等价的可分过程$\{y_t, t\in T\}$。称此$\{y_t\}$为$\{x_t\}$的**可分修正过程**❶。因此，当我们研究的问题只涉及过程的有限维分布函数时，我们就不妨假定原过程为可分过程。

---

❶ 可分修正存在性的证明，可参看[1]§3.1。

定义 3 称随机过程$\{x_t, \ t\in T\}$为**随机连续**（或依概率连续），如对任意$s\in T$及$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to s}P(|x_t-x_s|>\varepsilon)=0. \tag{3}$$

把（3）中的$t\to s$改为$t\to s+0$（或$t\to s-0$），相应地称为**右**（或**左**）**随机连续**。

例 5 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为例1中的概率空间，$T=[0,1]$，定义随机过程

$$x_t(\omega)=\begin{cases}1, & \text{如 } t>\omega,\\ 0, & \text{如 } t\leqslant\omega,\end{cases} \qquad t\in T.$$

任给$0<\varepsilon<1$，因为

$$\begin{aligned}P(|x_t-x_s|>\varepsilon)&=P(x_t=0, \ x_s=1)\\&\quad+P(x_t=1, \ x_s=0)\\&=\begin{cases}P(x_t=1, \ x_s=0), & \text{如 } s<t\\ P(x_t=0, \ x_s=1), & \text{如 } s>t.\end{cases}\\&=|t-s|\to 0 \quad (t\to s).\end{aligned}$$

所以$\{x_t\}$随机连续。此过程的样本函数除了$x(t, \ 1)\equiv 0$外，其余都是间断的，可见过程的随机连续性不能导致样本函数的连续性。随机连续过程的几个简单性质见习题 11—13。

对固定的ω，记平面二维点集

$$\boldsymbol{X}_R(\omega)=\{(t, \ x_t(\omega)), \ t\in R\},$$

其中$R\subseteq T$。令$\overline{\boldsymbol{X}}_R(\omega)$表示$\boldsymbol{X}_R(\omega)$在通常距离下的闭包。在此记号下，$\{x_t, \ t\in T\}$关于$R$可分等价于

$$P(\omega: \boldsymbol{X}_T(\omega)\subset\overline{\boldsymbol{X}}_R(\omega))=1.$$

下面是可分过程成为完全可分的一个充分条件。

定理 1 可分随机过程如随机连续必完全可分。

证明 设$\{x_t, \ t\in T\}$可分，S为其可分集，R是T的任一可列稠密子集。任取$s_0\in S$及$\{r_n\}\in R$使$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=s_0$。由设

$$\lim_{n\to\infty} P(|x_{r_n} - x_{s_0}| > \varepsilon) = 0,$$

从而存在$\{r_n\}$的子列$\{r_n'\}$，使

$$P(\lim_{n\to\infty} x_{r_n'} = x_{s_0}) = 1.$$

可见，对任一$s_0 \in S$，有

$$P\{(s_0, x_{s_0}) \in \overline{\mathbf{X}}_R\} = 1.$$

因为S是可列集，故得$P(\mathbf{X}_S \subset \overline{\mathbf{X}}_R) = 1$，从而

$$P(\overline{\mathbf{X}}_S \subset \overline{\mathbf{X}}_R) = 1, \tag{4}$$

S是可分集，由（4）

$$P(\mathbf{X}_T \subset \overline{\mathbf{X}}_S) = 1. \tag{5}$$

于是由（4），（5）得

$$P(\mathbf{X}_T \subset \overline{\mathbf{X}}_R) = 1.$$

即$\{x_t\}$关于R可分。

（二）可测性

为了考虑样本函数$x(t, \omega)$对t的积分。我们定义可测随机过程。

设$T = [0, \infty)$，以$\mathscr{B}$表T中全体Borel集所成的σ代数，L是$\mathscr{B}$上的勒贝格（Lebesgue）测度，$\mu = L \times P$，$\overline{\mathscr{B} \times \mathscr{F}}$是直积$\sigma$代数$\mathscr{B} \times \mathscr{F}$关于测度$\mu$的完备化。

定义 4 称随机过程$\{x_t, t \geqslant 0\}$为可测的，如对任意实数c，集

$$\{(t, \omega): x_t(\omega) \leqslant c\} \in \overline{\mathscr{B} \times \mathscr{F}}. \tag{6}$$

在研究马尔可夫过程时，我们还需要比（6）更强的可测性概念。

定理 2 **右连续过程（即样本函数右连续的随机过程）是可测的。**

证明 设$\{x_t, t \geqslant 0\}$为右连续过程。对固定的$t \geqslant 0$，定义

$$y_n(s)=\begin{cases}\dfrac{jt}{n}, & \text{如}\dfrac{(j-1)t}{n}\leqslant s<\dfrac{jt}{n},\\ t, & \text{如 } s=t,\end{cases}$$

其中 $j=1, 2, \cdots, n$，$0\leqslant s\leqslant t$。易见 $y_n(s)\downarrow s\ (n\to\infty)$。因为

$$x(y_n(s), \omega)=\sum_{j=1}^{n}x\left(\frac{jt}{n}, \omega\right)I_{\left[\frac{(j-1)t}{n}, \frac{jt}{n}\right)\times\Omega}(s, \omega)+x(t, \omega)I_{\{t\}\times\Omega}(s, \omega),$$

其中 I_A 表示集合 A 的示性函数。作为 (s, ω) 的函数，$x(y^n(s), \omega)$ 是定义在 $[0, t]\times\Omega$ 上的 $\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}$ 可测函数，从而是 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 可测的。由 $\{x_t\}$ 的右连续性

$$\lim_{n\to\infty}x(y_n(s), \omega)=x(s, \omega).$$

因此，只考虑在 $[0, t]\times\Omega$ 上 $x(s, \omega)$ 是 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 可测的，由 t 的任意性即知 $x(s, \omega)$ 在 $T\times\Omega$ 上是 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 可测函数❶。

习题 24 指出随机连续的过程必存在可测修正。

习　题

1. 证明：(i) 如 $\{x_t, t\in T\}$ 可分，$f(y)$ 是连续函数，则 $\{f(x_t), t\in T\}$ 可分；(ii) 如 $\{x_t, t\in T\}$ 随机连续又 $\{y_t\}\sim\{x_t\}$，则 $\{y_t, t\in T\}$ 随机连续。

2. 设 $\{x_t, t\in T\}$ 随机连续，$f(t, y)$ 为二元连续函数，证明 $\{\xi_t=f(t, x_t), t\in T\}$ 也随机连续。

3. 试举一随机过程 $\{x_t, t\in T\}$，使对某 A

$$P(x_t\in A)=1, \quad \text{一切 } t\in T, \text{ 但 } P(x_t\in A, t\in T)=0.$$

何时能保证 $P(x_t\in A, t\in T)$ 也等于 1．

4. 设 $\{x_t, t\in T\}$ 可分，R 为可分集，试证对几乎所有的 ω 有

$$\varlimsup_{\substack{t\to s\\ t\in T}}x_t(\omega)=\varlimsup_{\substack{r\to s\\ r\in R}}x_r(\omega), \quad \varliminf_{\substack{t\to s\\ t\in T}}x_t(\omega)=\varliminf_{\substack{r\to s\\ r\in R}}x_r(\omega),$$

---

❶ $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 可测的随机过程称为Borel可测过程。

其中 $s\in T$。

5．设$\{x_t,\ t\in T\}$可分，证明：$\inf\limits_{t\in T}x_t$，$\sup\limits_{t\in T}x_t$，$\overline{\lim\limits_{t\to s}}x_t$及$\underline{\lim\limits_{t\to s}}x_t$都是随机变量。

6．设$\{x_t,\ t\in(a,b)\}$可分，证明集$\{\omega:\ x_t(\omega)$在t_0点连续$\}$，$t_0\in(a,b)$及$\{\omega:\ x_t(\omega)$在(a,b)上连续$\}$都是可测集。

7．设$\{x_t,\ t\in[0,\infty)\}$可分，证明对任意$0<a<b$及任意实数c，集$\{\omega:\ |x_t(\omega)-c|\leqslant\varepsilon,\ t\in[a,b]\}$可测。

8．设$\{x_t,\ t\in[0,\infty)\}$可分，证明

$$\tau(\omega)=\begin{cases}\inf\{t:\ x_t(\omega)\neq x_0(\omega)\},\\ +\infty,\ \text{如对一切}\ t\ \text{有}\ x_t(\omega)=x_0(\omega)\end{cases}$$

是随机变量。

9．设$\{x_t,\ t\in T\}$可分，R是可分集。证明

$$P(\underline{\lim_{\substack{r\to t\\ r\in R}}}x_r\leqslant x_t\leqslant\overline{\lim_{\substack{r\to t\\ r\in R}}}x_r,\ \text{对一切}\ t\in T\ \text{成立})=1.$$

试举一过程使上式成立但关于R不可分。

10．设$P(\omega:\ x_t(\omega)$在$[a,b]$上右连续$)=1$。证明$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$可分。是否完全可分？若把$[a,b]$改为$[a,b)$呢？

11．设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$随机连续，试证$\{x_t\}$在$[a,b]$上一致随机连续，即对任给$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{\substack{|s-t|<h\\ a\leqslant s,\ t\leqslant b}}P(|x_s-x_t|>\varepsilon)=0.$$

*12．设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$随机连续，试证$\{x_t\}$在$[a,b]$上依概率有界，即

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{a\leqslant t\leqslant b}P(|x_t|>k)=0.$$

*13．设$\{x_t,\ t\in[0,\infty)\}$是随机连续的实值过程，$f(y)$，$y\in(-\infty,\infty)$是连续函数，试证$\{f(x_t),\ t\in[0,\infty)\}$也随机连续。

14．设$T=\{0,1,2,\cdots\}$，$\mathscr{B}$是由T的一切子集所成的σ代数。证明以T为参数的随机过程是可测的。

15．如T的勒贝格测度为零，证明以T为参数的随机过程是可测的。

16．试举一不可测的随机过程。

17．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$可测，证明存在$N$，$P(N)=0$，使得当$\omega\notin N$样本函数$x(t,\omega)$是$\overline{\mathscr{B}}_1$可测的，其中$\overline{\mathscr{B}}_1$表示$\mathscr{B}_1$关于勒贝格测度$L$的完备化。

18．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$可测且对每一$t\geqslant 0$，$E|x_t|<\infty$，证明$m(t)=Ex_t$是$\overline{\mathscr{B}}$可测函数。

19．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$可测且$\int_0^\infty E|x_t|dt<\infty$，证明存在$N$，$P(N)=0$，当$\omega\notin N$时$\int_0^\infty|x(t,\omega)|dt<\infty$，而且成立

$$E\int_0^\infty x(t,\omega)dt=\int_0^\infty Ex_t(\omega)dt.$$

20．若$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$满足$E|x_t|<\infty$，$t\geqslant 0$．问$Ex_t$满足什么条件即可判定$\{x_t\}$不可测？

21．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$与$\{y_t,\quad t\geqslant 0\}$都可测且随机等价，证明对任意勒贝格可测集$A\subset[0,\infty)$，

$$\int_A x(t,\omega)dt=\int_A y(t,\omega)dt$$

对几乎所有的ω成立。

*22．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$随机连续，且几乎所有的样本函数在每点$t$上的右极限存在．证明存在与$\{x_t\}$随机等价而且几乎所有的样本函数右连续的过程。

提示 令

$$A=(\omega:\lim_{n\to\infty}x\left(t+\frac{1}{n},\ \omega\right)\text{对一切}\ t\geqslant 0\ \text{存在}),$$

则$P(A)=1$．定义

$$\tilde{x}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}x\left(t+\dfrac{1}{n},\ \omega\right), & \text{如}\ \omega\in A,\\ x_t(\omega), & \text{如}\ \omega\notin A.\end{cases}$$

*23．设$\{x_t,\quad t\geqslant 0\}$可分且存在勒贝格零测集$A\subset[0,\infty)$，使得当$t\notin A$时，有

$$P(\omega: \lim_{s\to t} x_s(\omega) = x_t(\omega)) = 1,$$

试证$\{x_t\}$可测。

提示 令

$$y_n(t,\omega) = \inf_{\frac{k}{n}\leqslant s<\frac{k+1}{n}} x_s(\omega),$$

$$\text{如}\frac{k}{n}\leqslant t<\frac{k+1}{n},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$z_n(t,\omega) = \sup_{\frac{k}{n}\leqslant s<\frac{k+1}{n}} x_s(\omega),$$

$$\text{如}\frac{k}{n}\leqslant t<\frac{k+1}{n},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

则$\{y_n(t,\omega)\}$及$\{z_n(t,\omega)\}$可测且当$t\in A$时

$$P(\lim_{n\to\infty} y_n(t,\omega) = x(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} z_n(t,\omega)) = 1.$$

*24. 设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$，$0\leqslant a<b<\infty$，随机连续，试证存在完全可分且可测的过程$\{\tilde{x}_t,\ t\in[a,b]\}$，使$\{x_t\}\sim\{\tilde{x}_t\}$。

提示 由习题11知$\{x_t\}$一致随机连续。令R是$[a,b]$的一可列稠密子集，对每一$n\geqslant 1$，取$\{r_j^{(n)},\ j=0,1,\cdots,N_n+1\}$，满足

(i) $a=r_0^{(n)}<r_1^{(n)}<\cdots<r_{N_n}^{(n)}<r_{N_n+1}^{(n)}=b$,

(ii) $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant N_n}|r_k^{(n)}-r_{k+1}^{(n)}|\leqslant\delta_n\ (\delta_n\downarrow 0)$,

(iii) $S_n=\{r_1^{(n)},\ r_2^{(n)},\cdots,\ r_{N_n}^{(n)}\}\subset R$且$S_n\subset S_{n+1}$,

(iv) 对一切$u,v\in[r_k^{(n)},\ r_{k+1}^{(n)}]$，$0\leqslant k\leqslant N_n$,

$$P(|x_u-x_v|>\frac{1}{n})<\frac{1}{2^n}.$$

定义

$$y_n(t,\omega)=\begin{cases} x(r_k^{(n)},\omega), & \text{如 } t\in[r_k^{(n)},\ r_{k+1}^{(n)}),\ 0\leqslant k<N_n,\\ x(r_{N_n}^{(n)},\omega), & \text{如 } t\in[r_{N_n}^{(n)},\ b], \end{cases}$$

则$\{y_n(t,\omega)\}$可测且对每一t有$P(\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t,\omega)=x(t,\omega))=1$。

定义$\tilde{x}(t,\omega)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n(t,\omega)$。

25．试证对任一随机过程$\{x_t, t\geqslant 0\}$，如其$m(t)=0$且$K(t,t)$为二元连续函数，则必随机连续。如果$K(t,t)$还可积，证明存在与它随机等价的可测过程$\{y_t, t\geqslant 0\}$，对几乎所有的ω有

$$\int_0^\infty |y(t,\omega)|^2 dt<\infty.$$

提示 用习题24及Fubini定理。

§1.3 可分过程样本函数的连续性与阶梯性

本节我们分别给出可分过程样本函数连续与阶梯的充分条件，后面将用到它。

（一）样本函数的连续性

注意，为使函数在$[0,\infty)$上连续，只需它在任一$[a,b]$，$0\leqslant a<b$上连续即可。故只要考虑$T=[a,b]$的情形，先证一引理，以下均设$\{x_t, t\in T\}$可分。

引理1 设R是$\{x_t, t\in[a,b]\}$的可分集，N是例外集，如样本函数$x(t,\omega)$，$\omega\notin N$在R上一致连续，则它在$[a,b]$上必一致连续。

证明 任给$\varepsilon>0$，由假设存在$\delta>0$，只要$|r_1-r_2|<\delta$，r_1、$r_2\in R$就有

$$|x(r_1,\omega)-x(r_2,\omega)|<\varepsilon/3. \tag{1}$$

对任意t_1，$t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$，由可分性知，存在r_1、$r_2\in R$，使

$$|r_1-r_2|<\delta \text{ 而且 } |x(r_i,\omega)-x(t_i,\omega)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad i=1,2. \tag{2}$$

于是由（1），（2）得

$$|x(t_1,\omega)-x(t_2,\omega)|\leq|x(t_1,\omega)-x(r_1,\omega)|$$
$$+|x(r_1,\omega)-x(r_2,\omega)|+|x(r_2,\omega)-x(t_2,\omega)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

定理1 如果存在三个实数 $\alpha>0$，$\varepsilon>0$ 及 $c>0$，使对任意 t，$t+h\in[a,b]$ 有

$$E|x_t-x_{t+h}|^\alpha\leqslant c|h|^{1+\varepsilon},\tag{3}$$

则 $\{x_t,\ t\in[a,b]\}$ 的几乎所有的样本函数连续。

证明 不妨设 $[a,b]=[0,1]$，否则作变换

$$x'(t,\omega)=x(a+(b-a)t,\omega).$$

由马尔科夫不等式

$$P(|x_t-x_{t+h}|>d)\leqslant\frac{E|x_t-x_{t+h}|^\alpha}{d^\alpha}\leqslant\frac{c}{d^\alpha}|h|^{1+\varepsilon}.\tag{4}$$

当 $|h|\to0$ 时，（4）式右方趋于0，可见 $\{x_t\}$ 随机连续，从而由§1.2 定理 1 知 $\{x_t\}$ 完全可分。取 $[0,1]$ 的可列稠集

$$R=\left\{\frac{k}{2^n},\ k=0,1,\cdots,2^n,\ n=0,1,2,\cdots\right\}$$

为可分集，据引理 1 我们只需证 $\{x_t\}$ 的样本函数以概率 1 在 R 上一致连续即可。为此在（4）中取 $d=\frac{1}{2^{ns}}$，s 是任一使 $\varepsilon-s\alpha>0$ 的正数，则

$$P\left(\max_{0\leqslant j\leqslant2^n-1}\left|x\left(\frac{j+1}{2^n}\right)-x\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|>\frac{1}{2^{ns}}\right)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^{2^n-1}P\left(\left|x\left(\frac{j+1}{2^n}\right)-x\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|>\frac{1}{2^{ns}}\right)$$
$$\leqslant c2^{ns\alpha}\cdot\sum_{j=0}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n(1+\varepsilon)}}=c2^{-n(\varepsilon-s\alpha)},\tag{5}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\max_{0\leqslant j\leqslant 2^n-1}\left| x\left(\frac{j+1}{2^n}\right)-x\left(\frac{j}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right)$$

$$\leqslant c\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\varepsilon-\gamma\alpha)}<\infty.$$

因此由 Borel-Cantelli 引理知，（5）式左方的事件以概率1只出现有限多次，换言之，存在B使$P(B)=0$，当$\omega\notin B$时对一切$n\geqslant M_1=M_1(\omega)$，有

$$\left| x\left(\frac{j+1}{2^n},\ \omega\right)-x\left(\frac{j}{2^n},\ \omega\right)\right|\leqslant\frac{1}{2^{n\gamma}},$$

$$j=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1. \qquad (6)$$

固定$\omega\notin B$，注意，如$r\in R$，$r\in\left[\frac{j}{2^n},\ \frac{j+1}{2^n}\right)$，则$r$必定形如

$$r=\frac{j}{2^n}+\frac{a_1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{a_m}{2^{n+m}},$$

其中$a_i=0$或1。记

$$b_i=\frac{j}{2^n}+\frac{a_1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{a_i}{2^{n+i}},\quad 1\leqslant i\leqslant m\left(b_0=\frac{j}{2^n}\right),$$

则

$$\left| x(r,\ \omega)-x\left(\frac{j}{2^n},\ \omega\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{m-1}|x(b_{i+1},\ \omega)-x(b_i,\ \omega)| \qquad (7)$$

但是如$a_{i+1}=0$，则$[b_i,b_{i+1})=\varnothing$。如$a_{i+1}=1$，则$[b_i,b_{i+1})$为形如$\left[\frac{l}{2^{n+i+1}},\ \frac{l+1}{2^{n+i+1}}\right]$。故由（6），（7）得

$$\left| x(r,\ \omega)-x\left(\frac{j}{2^n},\ \omega\right)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{m-1}2^{-(n+i+1)\gamma}$$

$$\leqslant 2^{-n\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}2^{-(i+1)\gamma}\leqslant\beta\, 2^{-n\gamma}, \qquad (8)$$

其中假定 $\beta \geqslant 1$. 于是对任给的 $\tilde{\varepsilon} > 0$，选M_2使得当 $n \geqslant M_2$ 时 $\beta 2^{-nr} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$，这时也有 $2^{-nr} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$。如 r_1，$r_2 \in R$ 且 $|r_1 - r_2| < \min\{2^{-M_1(\omega)}, 2^{-M_2}\}$，那么在 r_1 与 r_2 之间至多只能有一个形如 $\frac{l}{2^n}$ 的点，其中 $n = \max\{M_1(\omega), M_2\}$（否则，如有 $\frac{l_1}{2^n}$，$\frac{l_2}{2^n}$，则仅此两点之差就不小于 $\min\{2^{-M_1(\omega)}, 2^{-M_2}\}$）。因此有两种可能，或者对某 l（$0 \leqslant l \leqslant 2^n$）

$$r_1, \ r_2 \in \left[\frac{l}{2^n}, \ \frac{l+1}{2^n}\right)$$

或者

$$r_1, \ r_2 \in \left(\frac{l-1}{2^n}, \ \frac{l+1}{2^n}\right),$$

其中 $n = \max\{M_1(\omega), M_2\}$。不论哪一场合，由（6），（8）我们都有

$$|x(r_1, \omega) - x(r_2, \omega)| < \tilde{\varepsilon},$$

例如在第二种场合，设 $r_1 < \frac{l}{2^n} < r_2$，那么

$$\begin{aligned}\left|x(r_1, \omega) - x(r_2, \omega)\right| &\leqslant \left|x(r_1, \omega) - x\left(\frac{l-1}{2^n}, \omega\right)\right| \\ &+ \left|x\left(\frac{l-1}{2^n}, \omega\right) - x\left(\frac{l}{2^n}, \omega\right)\right| + \left|x\left(\frac{l}{2^n}, \omega\right)\right. \\ &\left.- x(r_2, \omega)\right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} = \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

故 $x(t, \omega)$ 在R上一致连续。

由上可见满足条件（3）的随机过程必存在连续修正过程。条件（3）可粗略地理解为：要求过程的振幅 $|x_t(\omega) - x_{t+h}(\omega)|$ 平均说来要一致地小。下面的例子指出，上述形式的条件不能再改进，亦即其中的 ε 不能去掉。

例 设$\{x_t, \ t\in[0, \ 1]\}$为§1.2中例5的随机过程。设$h>0$，$I_A(\omega)$表集A的示性函数，则

$$E|x_t-x_{t+h}|^a=E|I_{[t,t+h)}|^a=P\{[t, \ t+h)\}=h.$$

如$h<0$，同样可得

$$E|x_{t+h}-x_t|^a=P\{[t+h, \ t)\}=|h|.$$

可见$\{x_t\}$满足条件（8），其中$\varepsilon=0$。但已知$\{x_t\}$的样本函数以概率1不连续。

从定理的证明可见，条件（8）可用如下较宽的条件代替：存在$\alpha>0$，$\varepsilon>0$及$c\geqslant0$，使对任意$d>0$有

$$P(|x_t-x_{t+h}|>d)\leqslant\frac{c}{d^a}|h|^{1+\varepsilon}. \qquad (9)$$

由马尔科夫不等式，如（8）成立（9）也成立。

系 如$\{x_t, \ t\in[a, \ b]\}$的增量

$$\Delta x_t=x_{t+\Delta}-x_t, \quad t, \ t+\Delta\in[a, \ b]$$

是正态随机变量且$E(\Delta x_t)=0$，$D(\Delta x_t)\leqslant c|\Delta|^\varepsilon$，其中$\varepsilon>0$，$c\geqslant0$。则$\{x_t\}$的样本函数以概率1连续。

证明 只需证条件（3）成立。由设

$$E|\Delta x_t|^a=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|y|^a e^{-\frac{y^2}{2\sigma_t^2}}dy,$$

其中$\sigma_t^2=D(\Delta x_t)$。作变换$y=\sigma_t z$，则上式右方化为

$$\frac{\sigma_t^a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|z|^a e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\beta\{D(\Delta x_t)\}^{a/2}$$

$$\leqslant\beta\cdot c^{\frac{\alpha}{2}}|\Delta|^{\frac{\alpha\varepsilon}{2}},$$

其中$\beta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|z|^a e^{-\frac{z^2}{2}}dz$，选取$\alpha$使$\frac{\alpha\varepsilon}{2}>1$即得（3）。

（二）样本函数的阶梯性

定义1 设$x(t)$，$t\in[a, b]$为普通的函数，如存在$[a, b]$的有穷分割$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，使得

（i）$x(t)=c_i$（常数），$t_i<t<t_{i+1}$，$i=0, 1, \cdots, n$；

（ii）$x(t_i-0)$及$x(t_i+0)$存在且不相等（对t_0或t_n自然只有右极限或左极限），$i=0, 1, \cdots, n$；

（iii）$x(t_i)=x(t_i-0)$或$x(t_i+0)$，$i=0, 1, \cdots, n$，

则称$x(t)$为定义在$[a, b]$上的阶梯函数，称t_i（$i=1, 2, \cdots, n-1$）为$x(t)$的跳跃点。

定义2 称$x(t)$，$t\in[a, \infty)$为阶梯函数，如存在数列$b_n\uparrow\infty(b_n>a)$，使$x(t)$在每一$[a, b_n]$上是阶梯函数。

用$U=(u_0, u_1, \cdots, u_n)$表示$[a, b]$中任一有限点列$u_0<u_1<\cdots<u_n$，以$S(U)$表示$U$中使

$$x(u_i)\neq x(u_i+1)$$

的指标i（$0\leqslant i\leqslant n-1$）的个数。记

$$S=\sup_{U} S(U), \tag{10}$$

其中上确界是对一切可能的$U\subset[a, b]$而取的。样本函数$x(t, \omega)$，$t\in[a, b]$所确定的S用$S(\omega)$表之。

引理2 设R为$\{x_t, t\in[a, b]\}$的可分集，N是例外集，则

$$S(\omega)=\sup_{U\subset R} S(U, \omega), \quad \omega\notin N.$$

证明 显然右方不大于左方。反之，对任一$U=(u_0, u_1, \cdots, u_n)\subset[a, b]$，令

$$\delta=\min_{0\leqslant i\leqslant n-1}(u_{i+1}-u_i), \tag{11}$$

$$\varepsilon=\min\{|x(u_i, \omega)-x(u_{i+1}, \omega)|: x_{u_i}(\omega)\neq x_{u_{i+1}}(\omega)\}, \tag{12}$$

由可分性，存在$r_i \in R$使

$$|u_i - r_i| < \frac{\delta}{2} \text{且} |x(u_i, \omega) - x(r_i, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{13}$$

于是由(11)—(13)知$r_0 < r_1 < \cdots < r_n$，而且如$x(u_i, \omega) \neq x(u_{i+1}, \omega)$，则$x(r_i, \omega) \neq x(r_{i+1}, \omega)$。因此我们有

$$S(U, \omega) \leqslant S(V, \omega),$$

其中$V = (r_0, r_1, \cdots, r_n) \subset R$。从而

$$S(\omega) \leqslant \sup_{U \subset R} S(U, \omega).$$

引理 3 设$\{x_t, t \in [a, b]\}$关于R_1及R_2可分，N是关于R_1，R_2的例外集，如$R_1 \cap R_2 = \varnothing$且$S(\omega) < \infty$，$\omega \notin N$，则样本函数$x(t, \omega)$，$\omega \notin N$是阶梯的。

证明 固定$\omega \notin N$，对任一$t \in [a, b]$，存在$\varepsilon_1 > 0$，使得样本函数$x(s, \omega)$在$(t - \varepsilon_1, t)$中为常数，否则，必可找到点列$t_0 < t_1 < \cdots$，使$t_n \uparrow t$且$x(t_i, \omega) \neq x(t_{i+1}, \omega)$。故$S(U_n, \omega) = n$，其中$U_n = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$，从而$S(\omega) = \infty$，这与假设矛盾。同理，对任一$t \in [a, b]$，存在$\varepsilon_2 > 0$使$x(s, \omega)$在$(t, t + \varepsilon_2)$中为常数。因此，对每一$t \in [a, b]$，存在$\varepsilon_t > 0$使样本函数$x(s, \omega)$在$(t - \varepsilon_t, t)$及$(t, t + \varepsilon_t)$中分别为常数值(如$t = a$或$b$，不妨补充$(a - \varepsilon_a, a)$及$(b, b + \varepsilon_b)$)。于是由有限覆盖定理知，存在有限多个$(t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i})$，$i = 1, 2, \cdots, n$，使

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i}).$$

可见使$x(s, \omega)$间断的点只能在t_i上，但在每一t_i上$x(t_i - 0, \omega)$及$x(t_i + 0, \omega)$都存在，故剩下证明$x(t_i, \omega) = x(t_i - 0, \omega)$或$x(t_i + 0, \omega)$。由可分性知，如$t \notin R_1$必存

在 $r_n \in R_1$，使 $r_n \to t$ 且 $x(r_n, \omega) \to x(t, \omega)$，$(n \to \infty)$。可见 $x(t, \omega) = x(t+0, \omega)$ 或 $x(t-0, \omega)$。因而使 $x(s, \omega)$ 不等于其左极限、也不等于其右极限的点只能在 R_1 中，同理这种点也应在 R_2 中。但 $R_1 \cap R_2 = \varnothing$，由此说明这种点是不存在的。

定理 2 设 $\{x_t, t \in [a, b]\}$ 可分且对任意 $t, s \in [a, b]$，有

$$P(x_s \neq x_t) \leqslant c|t-s|, \tag{14}$$

其中 c 为常数，则 $\{x_t, t \in [a, b]\}$ 的样本函数以概率 1 为阶梯的。

证明 由 (14)

$$P(|x_t - x_s| > \varepsilon) \leqslant P(x_t \neq x_s) \to 0 \quad (t \to s),$$

故 $\{x_t\}$ 随机连续，从而完全可分。任取 $[a, b]$ 的两个不相交的可列稠密子集 R_1，R_2。设 N_1，N_2 分别为关于 R_1 和 R_2 的例外集，$N = N_1 \cup N_2$。将 R_1 的点按某序排为 $\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \cdots$。取其前 $n+1$ 个点并按大小重新排列成 $U_n = (r_0, r_1, \cdots, r_n)$，由引理 2，当 $\omega \notin N$ 时

$$S(\omega) = \lim_{n \to \infty} S(U_n, \omega). \tag{15}$$

下证 $S(\omega)$ 是随机变量且 $ES < \infty$。为此定义随机变量

$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{如 } x(r_i, \omega) \neq x(r_{i+1}, \omega), \\ 0, & \text{如 } x(r_i, \omega) = x(r_{i+1}, \omega), \end{cases}$$

则 $S(U_n, \omega) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega)$，从而由 (15) 知 $S(\omega)$ 是随机变量，又因 $S(U_n) \leqslant S(U_{n+1})$，据单调收敛定理及 (15) 知

$$ES = \lim_{n \to \infty} E\{S(U_n)\}. \tag{16}$$

另一方面

$$E\{S(U_n)\}=\sum_{i=0}^{n-1}E\xi_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}P(x_{r_i}\neq x_{r_{i+1}})$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}c(r_{i+1}-r_i)\leqslant c(b-a).$$

所以$ES<\infty$。令

$$M=\{\omega:S(\omega)=\infty\},\quad A=M\cup N,$$

则$P(A)=0$且当$\omega\notin A$时$S(\omega)<\infty$，于是据引理3知样本函数$x(s,\omega)$，$\omega\notin A$是阶梯的。

习　题

1．设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$完全可分，如对$[a,b]$中的任意有限点列$t_0<t_1<\cdots<t_n$都有

$$\sum_{i=0}^{n-1}P(x_{t_i}\neq x_{t_{i+1}})\leqslant k\ (\text{常数}).$$

证明$\{x_t\}$的样本函数以概率1是阶梯的。

2．设$\{x_t,\ t\in[0,\infty)\}$为只取正整数值的可分过程，如对任意$t\geqslant0$及$h>0$有

$$P(x_{t+h}-x_t=k)=\frac{e^{-\lambda h}}{k!}\lambda^k h^k,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中$\lambda>0$是常数，试证$\{x_t\}$的样本函数以概率1是阶梯的。

3．设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$可分且对一切ω有$S(\omega)<\infty$，$\{x_t\}$的样本函数是否以概率1阶梯的？

4．设$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$可分，如存在$\alpha>0$，$\varepsilon>0$及$c\geqslant0$使对任意$d>0$，有

$$P(|x_t-x_{t+h}|>d)\leqslant\frac{c}{d^\alpha}|h|^{1+\varepsilon}.$$

证明$\{x_t\}$的样本函数以概率1连续。

*5. 设$\{x_t, t\in[a,b]\}$可分且在$[a,b]$上每一点t的左、右极限都存在。令$\{t_k^{(n)}, n=1,2,\cdots, k=0,1,\cdots,m_n\}$满足

$$a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{m_n}^{(n)}=b$$

且
$$\lambda_n=\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)})\to 0\ (n\to\infty).$$

试证如$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m_n}P(|x(t_k^{(n)})-x(t_{k-1}^{(n)})|>\varepsilon)=0$，$\varepsilon>0$任意，则$\{x_t\}$的样本函数以概率1连续。

提示 令N_ε表使$|x(t+0)-x(t-0)|>\varepsilon$的$t$的个数，$N_\varepsilon^{(n)}$表使$|x(t_k^{(n)})-x(t_{k-1}^{(n)})|>2\varepsilon$的$k$的个数，则$N_\varepsilon\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}N_\varepsilon^{(n)}$，由此证明$EN_\varepsilon=0$，故以概率1对任意$t$有$x(t-0)=x(t+0)$。

6. 设$f(t)$，$t\in[a,b]$为普通的函数，如存在点列$a\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_m\leqslant b$，满足

$$|f(t_{k-1})-f(t_k)|>\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,m,$$

就称$f(t)$在$[a,b]$上至少有m次ε-跳跃。试证$f(t)$在$[a,b]$上每点的左、右极限存在的充要条件为对任意$\varepsilon>0$，$f(t)$在$[a,b]$上只有有限次ε-跳跃。

第二章 正 态 过 程

正态过程、维纳（Wiener）过程（也称布朗运动）及普阿松（Poisson）过程是三个在理论和应用中都很重要的特殊随机过程，后两个过程将在第六章论述，本章我们介绍正态过程的基本概念及其性质。

§2.1 多维正态分布函数

设已给 n 维向量 $m=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，其中 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$是实数，以及 $n\times n$ 阶实对称非负定矩阵 $\Lambda=(\lambda_{jk})$，$j, k=1, 2, \cdots, n$，亦即满足下列条件的实矩阵：

（i）**对称性**：$\lambda_{jk}=\lambda_{kj}$；

（ii）**非负定性**：对任意不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\geqslant 0. \tag{1}$$

由概率论的知识知，当Λ的行列式$|\Lambda|\neq 0$时（如Λ是对称正定的，即不等式（1）严格大于零），如下定义的 n 元函数

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\frac{1}{\{(2\pi)^n|\Lambda|\}^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}b_{jk}(y_j-m_j)(y_k-m_k)\right\}, \tag{2}$$

其中 $(b_{jk})=\Lambda^{-1}$为Λ的逆矩阵，是 n 维概率密度函数，即满足 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)\geqslant 0$ 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1, \cdots, y_n)dy_1\cdots dy_n=1 ❶.$$

由 $f(y_1, \cdots, y_n)$ 决定的分布函数称为 n 维正态分布函数，其特征函数为❷

❶，❷证明可参看[Ⅰ]§2.6及§2.12。

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} m_j t_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{jk} t_j t_k \right\}. \tag{3}$$

下面我们把 n 维正态分布函数的定义扩展到Λ是非负 定的场合。为此先证明

引理 1 任给 n 维向量$\boldsymbol{m}=(m_1, \cdots, m_n)$ 及 $n \times n$ 阶实对称非负定矩阵 $\Lambda=(\lambda_{jk})$，则由（3）定义的 n 元函数 $\phi(t_1, \cdots, t_n)$是特征函数。

证明 如Λ是正定的，上面已说明结论正确。如Λ非正定，对每一正数 $s > 0$，定义矩阵

$$(\lambda_{jk}^{(s)}) = \Lambda_s = \Lambda + \frac{1}{s} I, \tag{4}$$

其中I为 $n \times n$ 阶单位矩阵。易见，对任意不全为零的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，我们有

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{jk}^{(s)} a_j a_k = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{jk} a_j a_k + \frac{1}{s} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk} a_j a_k$$

$$\geqslant \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0,$$

故Λ_s是正定的，由（4）显然Λ_s是对称的，因此

$$\phi_s(t_1, \cdots, t_n) = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} m_j t_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_{jk}^{(s)} t_j t_k \right\} \tag{5}$$

是 n 元特征函数。由（3），（4），（5）得

$$\phi_s(t_1, \cdots, t_n) = \phi(t_1, \cdots, t_n) \exp\left\{ -\frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{n} t_j^2 \right\}.$$

所以

$$\lim_{s \to \infty} \phi_s(t_1, \cdots, t_n) = \phi(t_1, \cdots, t_n).$$

因为$\phi(t_1,\cdots,t_n)$连续，据特征函数列的极限定理即知$\phi(t_1,\cdots,t_n)$也是特征函数。

定义 1 设已给n维向量$\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_n)$及$n\times n$阶实对称非负定矩阵$\Lambda=(\lambda_{jk})$，称由特征函数

$$\phi(t_1,\cdots,t_n)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_jt_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}t_jt_k\right\} \tag{6}$$

决定的分布函数为**n维正态分布函数**，并记为$N(\boldsymbol{m},\Lambda)$。如$|\Lambda|=0$，就称此正态分布函数为**退化的**。

当$n=1$时，Λ只含一个元素，通常记此元素为$\sigma^2\geqslant0$，对应的一维正态分布函数记为$N(m,\ \sigma)$。

定义 2 称随机向量$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$为**$n$维正态向量**，如$\boldsymbol{X}$的分布函数为$n$维正态分布函数。

例（二维非退化正态向量） 设$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2)$的分布函数为$N(\boldsymbol{m},\ \Lambda)$，其中$\boldsymbol{m}=(m_1,\ m_2)$，$\Lambda=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$，$\sigma_i>0$，$|r|<1$，$i=1,\ 2$。因为

$$\begin{aligned}|\Lambda|&=(\sigma_1\sigma_2)^2-r^2(\sigma_1\sigma_2)^2\\&=(\sigma_1\sigma_2)^2(1-r^2)>0,\end{aligned}$$

故Λ^{-1}存在且

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_2^2}{|\Lambda|} & \dfrac{-r\sigma_1\sigma_2}{|\Lambda|}\\ \dfrac{-r\sigma_1\sigma_2}{|\Lambda|} & \dfrac{\sigma_1^2}{|\Lambda|}\end{pmatrix}.$$

由（2），（3）知$\boldsymbol{X}$的分布密度函数及特征函数分别为

$$\begin{aligned}f(y_1,\ y_2)=&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\\&\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{(y_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

及

$$\phi(t_1, t_2)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{2} m_j t_j-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2+2r\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2+\sigma_2^2 t_2^2)\right\}. \tag{8}$$

利用特征函数与随机变量的各阶矩之关系，由（8）可知

$$m_j=Ex_j,\ \sigma_j^2=Dx_j,\ j=1,\ 2. \tag{9}$$

（9）式在一般场合下的证明见下节定理2。

引理2 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 维正态向量的充要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意线性组合

$$Y=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k+a_0 \tag{10}$$

为正态随机变量，其中实数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零，a_0 任意。

证明 充分性：在（10）中取 $a_0=0$，$a_j=1$，$a_k=0$，$k\neq j$。由设即知 x_j 是正态随机变量。记

$$Ex_j=m_j,\ Dx_j=\lambda_{jj},\ j=1,\ 2, \cdots, n. \tag{11}$$

由Schwarz不等式

$$E|(x_j-m_j)(x_k-m_k)|\leqslant(\lambda_{jj}\cdot\lambda_{kk})^{1/2},$$

故协方差

$$E(x_j-m_j)(x_k-m_k)=\lambda_{jk} \tag{12}$$

存在。令(10)中的 $a_0=0$，则

$$EY=\sum_{j=1}^{n} a_j m_j,$$

$$0\leqslant DY=E(Y-EY)^2=\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_j a_k, \tag{13}$$

故 Y 的特征函数为

$$Ee^{itY}=\exp\left\{it\sum_{j=1}^{n} m_j a_j-\frac{t^2}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_j a_k\right\}.$$

在上式中令 $t=1$，得X的特征函数

$$Ee^{i\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_ja_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\},\tag{14}$$

其中矩阵$\Lambda=(\lambda_{jk})$由（12），（13）知是对称非负定的，所以 X 为 n 维正态向量。

必要性：设X的分布函数为$N(m,\ \Lambda)$，其中$m=(m_1,\cdots,m_n)$，$\Lambda=(\lambda_{jk})$。任取 a_0 及不全为零的实数a_1，$a_2,\cdots$，a_n。则随机变量

$$Y=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k+a_0$$

的特征函数为

$$\begin{aligned}Ee^{itY}&=E\left(e^{ia_0t}e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}\right)\\&=e^{ia_0t}E\left(e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}\right)\\&=e^{ia_0t}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}m_k(a_kt)-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}(a_jt)(a_kt)\right\}\\&=\exp\left\{i\left(a_0+\sum_{k=1}^{n}m_ka_k\right)t-\frac{t^2}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\}\end{aligned}$$

上式表明Y的分布函数为$N(b,\ \sigma)$，其中

$$b=a_0+\sum_{k=1}^{n}m_ka_k,\qquad \sigma^2=\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k.$$

§ 2.2 正态过程的定义

定义1 设T为任意参数集，定义在（Ω, $\mathscr{F}$, P）上的随机变量集合$\{x_\alpha,\ \alpha\in T\}$称为**正态系**，如对任一正整数$n$及$\alpha_1$, α_2, $\cdots$, $\alpha_n\in T$，$(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_n})$ 是n维正态向量。特别，当$T\subset R_1$时就称正态系为**正态随机过程**。

如不特别声明，本节及下节均设$T=[0,\ \infty)$。由§2.1引理2立即得

定理1 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$是正态过程的充要条件为其任意有限多个元素的线性组合是正态随机变量。

下面说明正态分布函数$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\Lambda})$中参数$m_j$及$\lambda_{jk}$的概率意义。

定理2 设$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$的分布函数为$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\Lambda})$，其中$\boldsymbol{m}=(m_1,\ m_2,\cdots,m_n)$，$\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_{jk})$，$j$，$k=1$，$2$，$\cdots$，$n$，则$m_j=Ex_j$，$\lambda_{jk}=E(x_j-m_j)(x_k-m_k)$。

证明 $\boldsymbol{X}$的特征函数为

$$\phi(t_1,\cdots,t_n)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_jt_j-\frac{1}{2}\sum_{j,\ k=1}^{n}\lambda_{jk}t_jt_k\right\}. \qquad (1)$$

据§2.1引理2知x_j是正态随机变量，其特征函数可自（1）中令$t_k=0$，$k\neq j$而得，即

$$\phi(0,\ \cdots,\ 0,\ t_j,\ 0,\ \cdots,\ 0)=\exp\left\{im_jt_j-\frac{t_j^2}{2}\lambda_{jj}\right\},$$

因而$Ex_j=m_j$，$Dx_j=\lambda_{jj}$。其次由公式

$$Ex_jx_k=i^{-2}\frac{\partial^2\phi(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_j\partial t_k}\Bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$
$$=\lambda_{jk}+m_jm_k$$

得

$$E(x_j-m_j)(x_k-m_k)=Ex_jx_k-m_jm_k=\lambda_{jk}.$$

由上可见正态过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$完全由其均值$m(t)$及协方差$K(s,\ t)$所决定，由§1.1定理2知$K(s,\ t)$是实对

称非负定的。上面是先有$\{x_t\}$而得$m(t)$、$K(s, t)$，下面我们证明其反过来的问题。

定理 3 设已给参数集$T=[0, \infty)$，实值函数$m(t)$及对称非负定的二元实值函数$K(s, t)$，$s, t\in T$，则存在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及定义在其上的实正态过程$\{x_t, t\in T\}$，使其均值为$m(t)$，协方差为$K(s, t)$。

证明 对任意n及$t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$，造$n$元特征函数

$$\phi_{t_1,\cdots,t_n}(a_1, \cdots, a_n)=\exp\left\{ i\sum_{j=1}^{n} m(t_j)a_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} K(t_j, t_k)a_j a_k\right\}, \quad (2)$$

如此得到的特征函数族

$$\Phi=\{\phi_{t_1,\cdots,t_n}, \ n=1, 2, \cdots, t_i\in T\}$$

满足相容性条件，即$\phi_{t_1,\cdots,t_n}(a_1,\cdots,a_n)=\phi_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(a_{\alpha_1},\cdots,a_{\alpha_n})$及$\phi_{t_1,\cdots,t_m}(a_1, \cdots, a_m)=\phi_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(a_1, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0)$，其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$1, 2, \cdots, n$的任一排列。故据§1.1定理1存在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及定义在其上的随机过程$\{x_t, t\in T\}$，使对任意$n>0$及$t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$，$n$维向量$(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$的特征函数为(2)。由上面的定理2知

$$Ex_{t_j}=m(t_j),$$

$$E(x_{t_j}-m(t_j))(x_{t_k}-m(t_k))=K(t_j, t_k), \quad j, k=1, 2, \cdots, n.$$

换言之，$\{x_t\}$的均值及协方差函数分别为$m(t)$及$K(s, t)$。

注 这定理告诉我们，如果所考虑的过程的二阶矩$E|x_t|^2<\infty$，$t\in T$，而且所研究的问题只涉及过程的均方性质（即能用一、二阶矩表达的性质）。那么，我们就不妨假定原过程$\{x_t\}$为正态过程。这是因为如令$m(t)$，$K(s, t)$分别为$\{x_t\}$的均值及协方差函数，则由定理3必存在正态过程$\{y_t, t\in T\}$使它与$\{x_t\}$有相同的一、二阶矩，只需注意它们所在的概率空间可能不同。

定义 2 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$与$\{y_t,\ t\geqslant 0\}$为实过程，称复值过程$\{z_t=x_t+iy_t,\ t\geqslant 0\}$为正态的，如对任意$n\geqslant 0$及$t_1, t_2, \cdots, t_n\geqslant 0$，$(x_{t_1},\cdots, x_{t_n}, y_{t_1}, \cdots, y_{t_n})$为$2n$维正态向量。

我们指出，定理3对复值函数$m(t)$及$K(s, t)$也成立，即存在复正态过程$\{z_t=x_t+iy_t,\ t\geqslant 0\}$使

$$
\begin{aligned}
&Ez_t=m(t),\ E(z_s-m(s))\overline{(z_t-m(t))}\\
&\quad =K(s, t).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

实际上，设

$$
\begin{aligned}
&m(t)=m_1(t)+im_2(t),\ K(s, t)\\
&\quad =K_1(s, t)+iK_2(s, t).
\end{aligned}
$$

只要能证存在二元实过程$\{(x_t, y_t),\ t\geqslant 0\}$，使得$\{z_t=x_t+iy_t\}$是正态过程且满足

$$
\left.
\begin{aligned}
&Ex_t=m_1(t),\ Ey_t=m_2(t),\\
&E(x_s-m_1(s))(x_t-m_1(t))=E(y_s-m_2(s))\\
&\quad\cdot(y_t-m_2(t))=\frac{1}{2}K_1(s, t),\\
&E(x_s-m_1(s))(y_t-m_2(t))=-\frac{1}{2}K_2(s, t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

即可．因此由$K(s, t)=\overline{K(t, s)}$知

$$
K_1(s, t)=K_1(t, s),\ K_2(s, t)=-K_2(t, s).
\tag{5}
$$

又由（4），（5）得

$$
\begin{aligned}
&Ez_t=Ex_t+iEy_t=m_1(t)+im_2(t)=m(t),\\
&E(z_s-m(s))\overline{(z_t-m(t))}\\
&=E(x_s-m_1(s))(x_t-m_1(t))+E(y_s-m_2(s))\\
&\quad\cdot(y_t-m_2(t))+iE(x_t-m_1(t))(y_s-m_2(s))\\
&\quad -iE(x_s-m_1(s))(y_t-m_2(t))\\
&=\frac{1}{2}K_1(s, t)+\frac{1}{2}K_1(s, t)-\frac{i}{2}K_2(t, s)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{i}{2}K_2(s,\ t)$$

$$=K_1(s,\ t)+iK_2(s,\ t)$$

$$=K(s,\ t)。$$

为证存在满足（4）的二元正态过程$\{(x_t,\ y_t),\ t\geqslant 0\}$，任取$t_1,\ t_2,\cdots,t_n\geqslant 0$并令

$$m=(m_1(t_1),\cdots,m_1(t_n),\ m_2(t_1),\cdots,m_2(t_n)),$$

$$\Lambda=(\lambda_{jk})$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} K_1(t_1,t_1)\cdots K_1(t_1,t_n) & -K_2(t_1,t_1)\cdots -K_2(t_1,t_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K_1(t_n,t_1)\cdots K_1(t_n,t_n) & -K_2(t_n,t_1)\cdots -K_2(t_n,t_n) \\ -K_2(t_1,t_1)\cdots -K_2(t_n,t_1) & K_1(t_1,t_1)\cdots K_1(t_1,t_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -K_2(t_1,t_n)\cdots -K_2(t_n,t_n) & K_1(t_n,t_1)\cdots K_1(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$

则Λ是实对称非负定$2n\times 2n$阶矩阵。实际上，对任意不全为零的实数$c_1,\ c_2,\cdots,\ c_{2n}$，记$a_i=c_i,\ b_i=c_{n+i},\ 1\leqslant i\leqslant n$。则一方面

$$\sum_{j,k=1}^{2n}\lambda_{jk}c_jc_k=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}K_1(t_j,t_k)\{a_ja_k+b_jb_k\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}K_2(t_j,t_k)\{b_ja_k-a_jb_k\}。\qquad (6)$$

另一方面，如令$h_k=a_k+ib_k$，则由$K(s,t)$的非负定性，我们有

$$0\leqslant\sum_{j,k=1}^{n}K(t_j,\ t_k)h_j\bar{h}_k$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}K(t_j,\ t_k)\{a_ja_k+b_jb_k\}$$

$$-i\sum_{j,k=1}^{n}K(t_j,t_k)\{b_ja_k-a_jb_k\}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} K_1(t_j,t_k)\{a_j a_k + b_j b_k\}$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{n} K_2(t_j,t_k)\{b_j a_k - a_j b_k\}. \qquad (7)$$

最后一等式是因上式左方为实值，因而右方的虚部应等于零。由（6），（7）知Λ非负定。

今对t_1，t_2，…，t_n造 $2n$ 元特征函数

$$\phi_{t_1,\cdots,t_n}(c_1, c_2, \cdots c_{2n})$$

$$=\exp\left\{ i\left[\sum_{j=1}^{n} m_1(t_j)a_j + \sum_{j=1}^{n} m_2(t_j)b_j \right] - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} \lambda_{jk} c_j c_k \right\}, \qquad (8)$$

其中c_j与a_j，b_j的关系同前。于是如同定理3，存在二元随机过程$\{(x_t,\ y_t),\ t\geqslant 0\}$，使对任意$n\geqslant 0$及$t_1$，$t_2$，…，$t_n\geqslant 0$，$(x_{t_1},\cdots x_{t_n},\ y_{t_1},\cdots,y_{t_n})$的特征函数为（8），由定理2可知（4）满足。

§2.3　正态过程的性质

定义1　称随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为**独立过程**，如对任意n及t_1，t_2，…，$t_n\geqslant 0$。随机变量x_{t_1}，x_{t_2}，…，x_{t_n}相互独立。

定理1　正态过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$独立的充要条件为$K(s,t)=0$，$s\neq t$。

证明　对任意$t_1, t_2, \cdots, t_n\geqslant 0$。因$K(t_j,\ t_k)=0$，$j\neq k$，故正态向量$(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$的特征函数

$$\phi(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)=\exp\left\{ i\sum_{j=1}^{n} m(t_j)a_j\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} K(t_j, \ t_j)a_j^2\Big\}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{im(t_j)a_j-\frac{a_j^2}{2}\right\}.$$

由§2.2定理2知，上式右方是 x_{t_j}，$j=1, 2, \cdots, n$ 的特征函数之积，故它们相互独立。

反之，如 $s\neq t$，因 x_s 与 x_t 独立，得

$$K(s, \ t)=Ex_sx_t-m(s)m(t)$$
$$=Ex_sEx_t-m(s)m(t)=0.$$

回忆上节定理3下面的注，如我们考虑的过程 $\{x_t\}$ 除了满足 $E|x_t|^2<\infty$ 外还是不相关的，即满足 $Ex_sx_t=Ex_sEx_t$，这时 $K(s, t)=0$，$s\neq t$，从而据定理1我们不仅可设原过程 $\{x_t\}$ 是正态的，而且还可设 $\{x_t\}$ 是独立的。

引理1 设一维正态分布函数列 $F_k=N(m_k, \ \sigma_k)$，$k=1, 2 \cdots$，弱收敛于某一分布函数 F，则 F 也是正态分布函数且 $F=N(m, \ \sigma)$，其中

$$m=\lim_{k\to\infty}m_k, \quad \sigma^2=\lim_{k\to\infty}\sigma_k^2. \tag{1}$$

证明 设 F_k 及 F 的特征函数分别为 ϕ_k 及 ϕ，由设

$$\phi(t)=\lim_{k\to\infty}\phi_k(t)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\exp\left\{im_kt-\frac{t^2}{2}\sigma_k^2\right\}. \tag{2}$$

因此，如能证（1）中二极限存在，由（2）即得引理。由（2）

$$|\phi(t)|=\lim_{k\to\infty}|\phi_k(t)|=\lim_{k\to\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\sigma_k^2\right),$$

因 $\phi(t)$ 连续且 $\phi(0)=1$，故存在 $0<t_0<1$，使 $\phi(t_0)\neq 0$。从而

$$\ln|\phi(t_0)| = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{t_0^2}{2}\sigma_k^2\right).$$

上式说明 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k^2$ 存在，记此极限为 σ^2。于是在〔0， 1〕上一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\exp\left(\frac{\sigma_k^2}{2}t^2\right) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}t^2\right),$$

且因 F_k 弱收敛于 F，故也一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\phi_k(t) = \phi(t).$$

因此，对 $t\in$〔0， 1〕一致地有

$$e^{im_k t} = \phi_k(t)e^{\frac{\sigma_k^2}{2}t^2} \longrightarrow \phi(t)e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2}\ (k\to\infty), \qquad (3)$$

故

$$\left|\phi(t)e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2}\right| = \lim_{k\to\infty}|e^{im_k t}| = 1. \qquad (4)$$

今取积分线路

C_k: $z = e^{im_k t}$, $0\leqslant t\leqslant 1$,

C: $z = \phi(t)e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

由（3）曲线 C_k 在〔0， 1〕上一致收敛于 C，既然在积分线路上 $|z| = 1 \neq 0$，故

$$im_k = \int_{C_k}\frac{dz}{z} \longrightarrow \int_C \frac{dz}{z}\ (k\longrightarrow\infty).$$

这就证明了 $m = \lim\limits_{k\to\infty} m_k$ 存在。

利用引理 1 及 § 2.1 引理 2 可将正态系扩展如下。

定理 2　设 $X = \{x_\alpha, \alpha\in T\}$ 为正态系（T 任意），则由 X 张成的线性集 $L(X)$（即由 X 中有限多个元素的线性组合全体所构成的

集）也是正态系。

证明 $L(X)$ 中有限多个元素的线性组合可表成X的有限多个元素的线性组合，由§2.1引理2知此线性组合为正态随机变量。再用一次引理2即知$L(X)$是正态系。

定理3 设$X=\{x_\alpha,\ \alpha\in T\}$为正态系，则$X$在依概率收敛意义下的闭包$\overline{X}$仍是正态系。

证明 任取$x_i\in\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$。设

$$x_i=P\lim_{k\to\infty}x_{i_k},\quad x_{i_k}\in X,$$

其中 $P\lim$ 表依概率收敛，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=P\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_{i_k}\right).$$

因而 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{i_k}$ 的分布函数F_k弱收敛于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$的分布函数$F$。但$F_k$是正态分布函数，故由引理1知$F$也是正态的，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 是正态随机变量。利用§2.1引理2即得定理。

由于正态过程的有限维分布函数完全由$m(t)$及$K(s,t)$所决定，自然希望通过对$m(t)$，$K(s,t)$附加某种限制能导致过程的样本函数具有好的性质，下面是这方面的一些定理。

定理4 设正态过程$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$可分，如$m(t)=0$，$D(x_s-x_t)\leqslant c|s-t|^\varepsilon$，其中$c\geqslant 0$，$\varepsilon>0$。则$\{x_t\}$的样本函数以概率1连续。

证明 据§2.2定理1，$\Delta x_t=x_{t+\Delta}-x_t$，$t$，$t+\Delta\in[a,b]$是正态随机变量，又因$E(\Delta x_t)=0$，$D(\Delta x_t)\leqslant c|\Delta|^\varepsilon$，故据§1.3定理1的推论知$\{x_t\}$的样本函数以概率1连续。

定理5 设正态过程$\{x_t,\ t\in[a,b]\}$可分，如$m(t)$连续，$K(s,t)$对任意s，$t\in[a\ b]$满足

$$|K(s, t)-K(s, s)|\leqslant c|t-s|^{\varepsilon},$$

其中 $c\geqslant 0$，$\varepsilon>0$。则 $\{x_t\}$ 的样本函数以概率1连续。

证明 令 $y_t=x_t-m(t)$，由 $m(t)$ 的连续性知 $\{y_t, t\in[a, b]\}$ 为可分正态过程，而且

$$Ey_t=0,$$

$$D(y_s-y_t)=D(x_s-x_t)=|K(s, s)-K(s, t)+K(t, t)-K(t, s)|\leqslant 2c|t-s|^{\varepsilon}.$$

由定理3知 $\{y_t\}$ 的样本函数，从而 $\{x_t\}$ 的样本函数，以概率1连续。

下面研究样本函数的可导性。

引理2 设可分正态过程 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 满足条件

$$m(t)=0,\quad D(x_s-x_t)\geqslant\sigma^2|s-t|^{\varepsilon},\tag{5}$$

其中 $\sigma>0$，$\varepsilon>0$，则对任一 $t\geqslant 0$ 及 $\beta>\frac{\varepsilon}{2}$，有

$$P\left(\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t+s}-x_t|}{s^{\beta}}=\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t-s}-x_t|}{s^{\beta}}=\infty\right)=1.$$

证明 对 $t\geqslant 0$，$s>0$ 及正整数 n，记

$$B_{t,n,s}=\{\omega: |x_{t+s}(\omega)-x_t(\omega)|<ns^{\beta}\},$$

因 $x_{t+s}-x_t$ 是正态随机变量，由（5）知其均值为零，方差 $V=D(x_{t+s}-x_t)\geqslant\sigma^2 s^{\varepsilon}$，故

$$P(B_{t,n,s})\leqslant\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s^{\varepsilon}}}\int_{|y|<ns^{\beta}}\exp\left(\frac{-y^2}{2V}\right)dy$$

$$\leqslant\frac{2ns^{\beta}}{\sigma\sqrt{2\pi s^{\varepsilon}}}=\frac{2n}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot s^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}.\tag{6}$$

选 $\{s_k, k=1, 2, \cdots\}$ 使 $s_k\downarrow 0$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty}s_k^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}<\infty$，则由（6）知

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(B_{t,n},s_k)<\infty.$$

于是据 Borel-Cantelli 引理，存在 $A_{t,n}$，$P(A_{t,n})=1$ 使得对$\omega\in A_{t,n}$有$M(\omega)$，当 $k\geqslant M(\omega)$ 时成立

$$\frac{|x_{t+s_k}(\omega)-x_t(\omega)|}{s_k^{\beta}}\geqslant n.$$

可见当$\omega\in A_{t,n}$时

$$\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t+s}(\omega)-x_t(\omega)|}{s^{\beta}}\geqslant n.$$

令 $H_t^+=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{t,n}$，则$P(H_t^+)=1$，且

$$\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t+s}(\omega)-x_t(\omega)|}{s^{\beta}}=\infty,\quad \omega\in H_t^+ . \tag{7}$$

同理可证，存在 H_t^-，$P(H_t^-)=1$ 使得当 $\omega\in H_t^-$时

$$\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t-s}(\omega)-x_t(\omega)|}{s^{\beta}}=\infty. \tag{8}$$

由（7），（8）即得引理。

定理 6 如正态过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$的样本函数以概率 1 连续且满足条件（5），其中 $\varepsilon<2$，则$\{x_t\}$的样本函数以概率 1 几乎处处不可导。

证明 不妨设$\{x_t\}$的所有样本函数连续。显然$\{x_t\}$可分且可测，令

$$A=\left\{(t,\ \omega):\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t+s}(\omega)-x_t(\omega)|}{s}\right.$$

$$\left.=\overline{\lim_{s\downarrow 0}}\frac{|x_{t-s}(\omega)-x_t(\omega)|}{s}=\infty\right\},$$

$$A_t=(\omega:(t,\omega)\in A),$$

在引理 2 中取 $\beta=1$ 即知，对任一 $t\geqslant 0$ 有 $P(A_t^c)=0$，其中 A_t^c 表 A_t 的补集。于是由 Fubini 定理知

$$L\times P(A^c)=0,$$

其中 L 为 $[0,\infty)$ 上的勒贝格测度，因此存在 ω 集 B，$P(B)=1$，当 $\omega\in B$ 时

$$L\{t:(t,\omega)\in A^c\}=0.$$

可见样本函数以概率 1 几乎处处不可导。

习 题

1. 设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 维正态向量，证明 $\{x_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$ 是正态系。

2. 试举例 X 与 Y 为正态随机变量，但 $X+Y$ 不是正态随机变量，(X,Y) 不是正态向量。

3. 试举例 X 与 Y 为正态随机变量，$EXY=0$ 但 X 与 Y 不独立。

4. 试造两个复随机变量 $X=x_1+ix_2$，$Y=y_1+iy_2$ 使 $\{X,Y\}$ 是正态系，$EX\overline{Y}=0$ 但 X 与 Y 不独立。

5. 设 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 为正态过程，证明下列二条件等价。

(i) 对任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\geqslant 0$ 及 $h>0$，$(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$ 与 $(x_{t_1+h},\cdots,x_{t_n+h})$ 同分布。

(ii) $Ex_t=$ 常数，$K(s,t)=|s-t|$。

6. 设 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 与 $\{y_t,\ t\geqslant 0\}$ 为正态过程且它们相互独立，证明 $z_t=x_t+iy_t$ 为复正态过程。

7. 证明按 §2.2 定理 3 后构造的复正态过程 $\{z_t=x_t+iy_t,\ t\geqslant 0\}$ 具有性质 $Ez_sz_t=Ez_sEz_t$。

提示 利用 §2.2 的(4)，(5)式。

*8. 称复值过程 $\{z_t=x_t+iy_t,\ t\geqslant 0\}$ 为独立的，如 $\{x_t,y_t,\ t\geqslant 0\}$ 两两独立。今设复过程 $\{w_t,\ t\geqslant 0\}$ 满足 $E|w_t|^2<\infty$，$Ew_sw_t=Ew_sEw_t$，证明存在独立的复正态过程 $\{z_t,\ t\geqslant 0\}$ 使它与 $\{w_t\}$ 有相同的均值及协方差函数。

提示 利用上题可知存在复正态过程 $\{z_t,\ t\geqslant 0\}$ 满足 $Ez_sz_t=Ez_s\overline{Ez_t}$ 及 $Ez_sz_t=Ez_sEz_t$，由此二方程证明 $\{z_t\}$ 独立。

第三章　马尔科夫链

离散参数马尔科夫链是经典独立试验序列模型的推广，最初由 A. A. MAPKOB(1856—1922) 于 1906年研究而得名。马尔科夫链的理论迄今已较完整和深入，在自然科学及工程技术中也有广泛的应用。本章介绍离散参数马尔科夫链的基本理论，一般的马尔科夫过程将在第四章讨论。

§3.1　马氏链的定义及其转移概率

(一) 定义与例子

定义1　称定义在概率空间（$\Omega, \mathscr{F}, P$）上的随机序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 为**离散参数马尔科夫链**(以下简称马氏链)，如果它满足下列二条件：

（i）$\{x_n, n=0, 1, \cdots\}$ 的状态空间 E 为可列集❶；

(ii) 对任意 n 及状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}$，只要 $P(x_0=i_0, x_1=i_1, \cdots, x_n=i_n)>0$，就有

$$P(x_{n+1}=i_{n+1}|x_0=i_0, \cdots, x_n=i_n)=P(x_{n+1}=i_{n+1}|x_n=i_n). \quad (1)$$

条件 (ii) 称为**马尔科夫性**(或**无后效性**)，它是马氏链的特征，(1)的等价形式见定理1。

定义2　马氏链 $\{x_n, n\geq 0\}$ 称为**齐次的**，如果对任意 m 和 n 及任意状态 i 和 j，只要 $P(x_n=i)>0$，$P(x_m=i)>0$，就有

---

❶ 这时可测空间（E，$\mathscr{B}$）中 $\mathscr{B}$ 为 E 的一切子集所成的 σ 代数。

$$P(x_{n+1}=j|x_n=i)=P(x_{m+1}=j|x_m=i). \qquad (2)$$

相互独立的离散型随机变量序列 $x_1, x_2, \cdots$ 是马氏链最简单的例子。如果它们同分布，$\{x_n\}$ 就成为齐次的。

在齐次的情形，记

$$p_{ij}=P(x_{n+1}=j|x_n=i) \qquad (3)$$

并称 p_{ij} 为 $\{x_n\}$ 的**转移概率**。由 p_{ij}，$i, j\in E$，为元素所成的矩阵

$$P=(p_{ij})$$

称为 $\{x_n\}$ 的**转移矩阵**。转移概率 p_{ij} 是齐次马氏链最重要的特征量。

为理解马氏性(1)式的直观意思，设想有一个作随机运动的质点。以 x_n 表示该质点在时刻 n 所处的位置。"$x_n=i$"表示质点在时刻 n 处于状态 i 这一事件。如果我们把时刻 n 看成"现在"，则时刻 $0, 1, \cdots, n-1$ 都表示"过去"，而时刻 $n+1$ 表示"将来"。于是(1)表示在已知过去 $x_0=i_0$，$x_1=i_1, \cdots, x_{n-1}=i_{n-1}$ 及现在 $x_n=i_n$ 的条件下，质点在时刻 $n+1$ 处于状态 i_{n+1} 的条件概率，只依赖于现在发生的事件"$x_n=i_n$"而与过去曾发生过什么事件无关。简言之，马氏性表示，在已知"现在"的条件下，"将来"与"过去"是独立的。

转移概率 p_{ij} 表示质点在时刻 n 自状态 i 出发，于时刻 $n+1$ 转移到状态 j 的概率。齐次性条件(2)要求此转移概率与 n 无关，即无论质点在何时处于状态 i，只要由 i 出发经一单位时间转到 j，其概率都相同。

本章只限于考虑齐次马氏链。往后总假定构成条件的事件有正概率，以避免条件概率的不确定性，以后不再一一声明。

下面举几个马氏链的例子。

例1 简单随机游动设 $x_0=a$ 常数。$z_1, z_2, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，而且

$P(z_n=1)=p, P(z_n=-1)=q, P(z_n=0)=r$。$p+$

$q+r=1$； $0<p$， $q<1$； $0\leqslant r<1$。令

$$x_n=x_0+z_1+\cdots+z_n, \tag{4}$$

则$\{x_n, n=0, 1, \cdots\}$为齐次马氏链。其状态空间$E=\{a\pm n, n=0, 1, \cdots\}$，转移概率为

$$p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=q, p_{i,i}=r，其余的 p_{i,j}=0。 \tag{5}$$

证明很简单，留作习题。称上述的$\{x_n, n=0, 1, \cdots\}$为**简单随机游动**。特别，如$p=q=\dfrac{1}{2}$（从而$r=0$），就称$\{x_n\}$为**对称随机游动**。

简单随机游动的直观意义如下。设想有一质点在数轴上随机地游动。每一单位时间移动一次，每次只能向左或向右移动一个单位距离，或原地不动。设质点的初始位置为a，它向右移动的概率为p，向左移动的概率为q，原地不动的概率为r（$p+q+r=1$），如图1所示。以x_n表示质点经n次移动所处的位置，则$\{x_n, n=0, 1, \cdots\}$就是简单随机游动，它代表了质点的运动过程。一般的随机游动见习题1。



图 1

例2 带吸收壁的随机游动。设简单随机游动$\{x_n, n\geqslant 0\}$的状态空间为$\{0, 1, 2, \cdots, b\}$。如质点移动到状态0或b后就永远停留在该状态，亦即如$p_{0,0}=1$，$p_{b,b}=1$，其余的p_{ij}与(5)同。就称$\{x_n\}$为带两个吸收壁0和b的随机游动。其转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



图 2

例3 如果例 2 中的质点当到达状态 0 或 b 后，下一次移动必返回，亦即如果 $p_{0,1}=1$，$p_{b,b-1}=1$，就称 $\{x_n\}$ 为带两个反射壁 0 和 b 的随机游动。



图 3

自然我们可类似地定义只带一个吸收（或反射）壁，例如带左吸收壁 0 而让 $b=\infty$，或者带左反射右吸收壁等等的随机游动。

例4 设进行一列独立试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 q。以 x_n 表示前 n 次试验的成功次数，则 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 是齐次马氏链。$E=\{0,1,2,\cdots\}$，

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ & & \cdots\cdots & & & \end{pmatrix}.$$

例5 生灭链。观察某种生物群体，以 x_n 表示在时刻 n 群体的数目，设为 i 个数量单位，如在时刻 $n+1$ 增生到 $i+1$ 个数量单位的概率为 b_i，减灭到 $i-1$ 个数量单位的概率为 a_i，保持不变的概率为 $r_i=1-(a_i+b_i)$。则 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 为齐次马氏链，$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$p_{ii}=r_i$，$p_{i,i+1}=b_i$，$p_{i,i-1}=a_i(a_0=0)$。如

上的马氏链称为生灭链。

例6 艾伦费斯特（Ehrenfest）坛子模型。这是带两个反射壁的随机游动。设有一坛子内装有N个球，它们不是红的就是白的。设每次随机地从坛中抽出一球，把它换成另一颜色后再放回坛中。令x_n表示经n次抽球后坛中的红球数，则$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链。E为坛中的红球数，即$\{0, 1, 2, \cdots, N\}$。转移概率为

$$p_{ii}=0, \quad p_{i,i+1}=\frac{N-i}{N}, \quad p_{i,i-1}=\frac{i}{N},$$
$$i=0, 1, \cdots, N.$$

（二）转移概率

设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，对任意整数$n\geqslant 0$，$k>0$及状态$i, j\in E$，由马氏性及齐次性可知，条件概率

$$P(x_{n+k}=j\,|\,x_n=i)$$

的值与n无关。实际上，

$$P(x_{n+k}=j\,|\,x_n=i)=\sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}=0}^{\infty}P(x_{n+1}=i_1,$$
$$x_{n+2}=i_2, \cdots, x_{n+k-1}=i_{k-1}, x_{n+k}=j\,|\,x_n=i). \tag{7}$$

根据齐次马氏性（1），（3），上式右方每一项

$$P(x_{n+1}=i_1, x_{n+2}=i_2, \cdots, x_{n+k}=j\,|\,x_n=i)$$
$$=\frac{1}{P(x_n=i)}\sum_{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}=0}^{\infty}P(x_0=r_0, x_1=r_1, \cdots,$$
$$x_{n-1}=r_{n-1}, x_n=i, x_{n+1}=i_1, \cdots, x_{n+k}=j)$$
$$=\frac{1}{P(x_n=i)}\sum_{r_0, \cdots, r_{n-1}=0}^{\infty}P(x_0=r_0, \cdots, x_{n-1}=r_{n-1},$$
$$x_n=i)p_{i,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{k-1},j}$$
$$=p_{i,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{k-1},j} \tag{8}$$

与n无关。

记

$$p_{ij}^{(k)}=P(x_{n+k}=j\mid x_n=i),\quad k=1,2,\cdots,$$

并称 $p_{ij}^{(k)}$ 为马氏链 $\{x_n\}$ 的**k步转移概率**，它表示质点自 i 出发，经 k 步到达 j 的概率。注意 $p_{ij}^{(1)}=p_{ij}$，$p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$。

记 k 步转移矩阵

$$P^{(k)}=(p_{ij}^{(k)}),\quad k\geqslant 1.$$

由（7），（8）知

$$P^{(k)}=[P]^k.$$

特别，我们有

$$P^{(m+k)}=[P]^{m+k}=[P]^m\cdot[P]^k=P^{(m)}P^{(k)}. \tag{9}$$

引理1 $p_{ij}^{(k)}$ 具有性质

（a） $0\leqslant p_{ij}^{(k)}\leqslant 1$；

（b） $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{(k)}=1$；

（c） $$p_{ij}^{(m+k)}=\sum_{r=0}^{\infty}p_{ir}^{(m)}p_{rj}^{(k)}. \tag{10}$$

等式（c）称为**切普曼-柯尔莫戈洛夫**（Chapman-Колмогоров）**方程**

证明 （a）是明显的，（b）是由于 $P(x_{n+k}\in E\mid x_n=i)=1$，（c）是矩阵关系式（9）中的第 i 行第 j 列元素。

C-K方程指出高步转移概率可用低步（以至一步）的转移概率表示。（10）的直观意思为质点由 i 经 $m+k$ 步到达 j 可分两步骤完成。先由 i 经 m 步转到某一中间状态 r，再由 r 经 k 步到达 j，前者的概率为 $p_{ij}^{(m+k)}$，后两步的概率为 $p_{ir}^{(m)}p_{rj}^{(k)}$，其中 r 可以任意，故需对一切可能的状态求和，即为（10）的右方。

下一个引理指出，如果我们还知道 $\{x_n\}$ 的初始分布 $q_i=P(x_0=i)$，$\{x_n\}$ 的有穷维联合分布就可由 (p_{ij}) 完全决定。往后将 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}$ 简写为 $\displaystyle\sum_{i}$。

引理2 （a） $P(x_n=j)=\sum_i q_i p_{ij}^{(n)}$； (11)

（b）对任意整数 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k$ 及状态 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，有

$$P(x_{n_1}=i_1,\cdots,x_{n_k}=i_k)=P(x_{n_1}=i_1)p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}. \tag{12}$$

证明 （a） $P(x_n=j)=\sum_i P(x_0=i)P(x_n=j|x_0=i)$

$$=\sum_i q_i p_{ij}^{(n)}.$$

（b）为简单起见，我们对 $k=3$ 并设 $n_1=1$，$n_2=4$，$n_3=6$ 证明(12)式。对一般的情况其证法完全相同。应用(8)，C-K方程及(11)可知

$$P(x_{n_1}=i,\ x_{n_2}=j,\ x_{n_3}=k)=P(x_1=i,x_4=j,x_6=k)$$

$$=\sum_{u_0,u_2,u_3,u_5} P(x_0=u_0,\ x_1=i,\ x_2=u_2,\ x_3=u_3,\ x_4=j,x_5=u_5,x_6=k)$$

$$=\sum_{u_0,u_2,u_3,u_5} P(x_0=u_0)P(x_1=i,\cdots,x_6=k|x_0=u_0)$$

$$=\sum_{u_0,u_2,u_3,u_5} P(x_0=u_0)p_{u_0,i}\cdot p_{i,u_2}\cdot p_{u_2,u_3}\cdot p_{u_3,j}\cdot p_{j,u_5}\cdot p_{u_5,k}$$

$$=\left(\sum_{u_0}P(x_0=u_0)p_{u_0,i}\right)\left(\sum_{u_2,u_3}p_{i,u_2}p_{u_2,u_3}p_{u_3,j}\right)\left(\sum_{u_5}p_{j,u_5}p_{u_5,k}\right)$$

$$=P(x_1=i)p_{ij}^{(3)}p_{jk}^{(2)}=P(x_{n_1}=i)p_{ij}^{(n_2-n_1)}p_{jk}^{(n_3-n_2)}.$$

如果在(12)的两边除以 $P(x_{n_1}=i_1)>0$，则得

$$P(x_{n_2}=i_2,\cdots,x_{n_k}=i_k|x_{n_1}=i_1)$$

$$=p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)}\cdot p_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)}\cdots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})} \tag{13}$$

（三）马氏性的等价形式

马氏性有几种看起来不相同、但实际上等价的形式。记$\mathscr{N}_m=\sigma\{x_n;\ n\leqslant m\}$为由$m+1$个随机变量$x_0,x_1,\cdots,x_m$所产生的最小$\sigma$代数，即包含一切形如$(\omega:x_n(\omega)=i)$，$0\leqslant n\leqslant m$，$i\in E$的$\omega$集的最小$\sigma$代数。类似地记$\mathscr{N}^m=\sigma\{x_n;\ n\geqslant m\}$。

定理1 下列诸条件等价：

（a）马氏性（1）成立；

（b）对任意正整数r,m,k及任意非负整数$n_1<n_2<\cdots<n_r(n_r<m)$，以及任意状态$i_1,i_2,\cdots,i_r,i_m,i_{m+k}$有

$$P(x_{m+k}=i_{m+k}|x_{n_1}=i_1,\cdots,x_{n_r}=i_r,\ x_m=i_m)$$

$$=P(x_{m+k}=i_{m+k}|x_m=i_m); \tag{14}$$

（c）对任意正整数m及状态i和$F\in\mathscr{N}_{m-1}$，$G\in\mathscr{N}^{m+1}$，有

$$P(G|F,x_m=i)=P(G|x_m=i); \tag{15}$$

（d）对任意正整数m及状态i和$F\in\mathscr{N}_{m-1}$，$G\in\mathscr{N}^{m+1}$，有

$$P(FG|x_m=i)=P(F|x_m=i)P(G|x_m=i). \tag{16}$$

证明 （c）$\Longleftrightarrow$（d）只需利用等式：

$$P(FG|x_m=i)=P(G|F,\ x_m=i)P(F|x_m=i).$$

（a）$\Longrightarrow$（b）为简单起见，下面对$r=1$证之。$r>1$的证法完全相同。利用（a）可知

$$P(x_{n_1}=i_1,\ x_m=i_m,\ x_{m+k}=i_{m+k})$$

$$=\sum_{\substack{j_s:\ 0\leqslant s<m+k\\ s\neq n_1,\ m}}P(x_0=j_0,\ x_1=j_1,\cdots,x_{n_1}=i_1,$$

$$x_{n_1+1}=j_{n_1+1},\cdots,x_{m+k}=i_{m+k})$$

$$=\sum_{j_s:\ m<s<m+k}P(x_{m+k}=i_{m+k}|x_{m+k-1}=j_{m+k-1})$$

$$\cdot P(x_{m+k-1}=j_{m+k-1}|x_{m+k-2}=j_{m+k-2})$$
$$\cdots P(x_{m+1}=j_{m+1}|x_m=i_m)P(x_{n_1}=i_1,x_m=i_m).$$

故(14)的左方等于

$$\frac{P(x_{n_1}=i_1,\ x_m=i_m,\ x_{m+k}=i_{m+k})}{P(x_{n_1}=i_1,\ x_m=i_m)}$$
$$=\sum_{j_s:m<s<m+k}P(x_{m+k}=i_{m+k}|x_{m+k-1}=j_{m+k-1})$$
$$\cdots P(x_{m+1}=j_{m+1}|x_m=i_m). \tag{17}$$

同理可证(14)的右方也等于(17)的右方。

(b)$\Longrightarrow$(c) 令

$\Pi_1=\{F;F$形如$(x_{s_1}=i_1,\cdots,x_{s_n}=i_n),\ 0\leqslant s_1<\cdots<s_n<m,\ n\geqslant 1,i_k\in E\}$,

$\Pi_2=\{G;G$形如$(x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_n}=i_n),\ m<t_1<\cdots<t_n,\ n\geqslant 1,i_k\in E\}$,

则对任意$F\in\Pi_1$，$G\in\Pi_2$，由(b)不难证明下式成立

$$P(G|F,\ x_m=i)=P(G|x_m=i). \tag{18}$$

今任取$F\in\Pi_1$并固定之。对此F令

$\Lambda_1=\{G;G$使(15)成立$\}$,

由(18)知$\Pi_2\subset\Lambda_1$。易验证Π_2是π-系，Λ_1是λ-系。故据附录(一)定理1知，$\Lambda_1\supset\sigma(\Pi_2)=\mathscr{N}^{m+1}$。

任取$G\in\mathscr{N}^{m+1}$并固定之。对此G令

$\Lambda_2=\{F;F$使$P(F,x_m=i,G)=P(F,x_m=i)P(G|x_m=i)\}$.

易验证Λ_2是λ-系，且由上面所证$\Lambda_2\supset\Pi_1$。因此$\Lambda_2\supset\sigma(\Pi_1)=\mathscr{N}_{m-1}$。换言之，对任意的$G\in\mathscr{N}^{m+1}$及$F\in\mathscr{N}_{m-1}$(15)成立。

(c)$\Longrightarrow$(a) 只需取$F=(x_0=i_0,\cdots,x_{m-1}=i_{m-1})$，$G=(x_{m+1}=j)$即可。

前面先是给了马氏链$\{x_n\}$，进而得到$\{q_i\}$及(p_{ij})。此(p_{ij})具有引理1中(a)—(c)的性质。反之我们有

定理2 （存在性定理）。任给概率分布$\{q_i\}$及满足$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$，$\sum_j p_{ij}=1$，$i,j=0,1,2,\cdots$，的矩阵$(p_{ij})$。则存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的齐次马氏过程$\{x_n, n=0,1,2,\cdots\}$。使得其状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$，初始分布为$\{q_i\}$，转移矩阵为$(p_{ij})$。

我们将在第四章证明定理2的一般情形。由此可见，马氏链$\{x_n\}$完全由其初始分布$\{q_i\}$及转移矩阵(p_{ij})所决定。$\{q_i\}$描述随机质点的初时状态，(p_{ij})刻划质点运动过程中的概率规律。因此，如两个马氏链有相同的(p_{ij})，不论其初始分布是否一样，它们的运动将遵循同一的概率法则。

习　题

1．设x_0，x_1，x_2，…为取整数值且相互独立同分布的随机变量序列。证明$y_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$，$n=0,1,2,\cdots$为齐次马氏链。指出其状态空间并求其转移概率。

2．设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，其转移概率$p_{ij}=a_j$。证明$\{x_n, n\geqslant 1\}$是独立同分布的。

3．设x_0，x_1，…相互独立且$P(x_n=1)=p$，$P(x_n=-1)=q$，$p+q=1$。令$y_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$，求$P(y_i\geqslant 0, i=0,1,2,3)$。

4．设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链。证明$y_n=x_n-x_{n-1}$，$n\geqslant 1$独立同分布的充要条件为$\{x_n\}$的转移概率$p_{ij}=a_{j-i}$（即只与j和i之差有关的数）。

5．设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，如$P(x_n=i)=a_i$，$n\geqslant 0$。证明$P(x_{n+k}=i_k, 0\leqslant k\leqslant m)=P(x_k=i_k, 0\leqslant k\leqslant m)$。

6．连续地抛掷一均匀硬币，令h_n和t_n分别表示前n次掷得正面和反面的次数。试问$\{h_n, n\geqslant 1\}$和$\{x_n=h_n-t_n, n\geqslant 1\}$是否齐次马氏链？如是，求

其转移概率。

7. 接连独立地从 1，2，3，4，5，6 六数字中取出一数，取后放回。每次每个数被取出的概率为$\frac{1}{6}$。设x_n和y_n分别表示前n次取出数字中所得的最大和最小数字。证明$\{x_n, n \geqslant 1\}$，$\{y_n, n \geqslant 1\}$是马氏链，求其转移概率。

8. 设甲袋装有 6 只黑球，乙袋内有 4 只白球。每次从甲、乙两袋中随机地各抽一球并进行交换，然后再放入袋中，设x_n为经n次交换后甲袋内的白球数问

(i) $\{x_n, n \geqslant 0\}$是否齐次马氏链？

(ii) 试求第 3 次交换后甲袋恰有 2 只白球的概率。

9. 甲、乙两人轮流投篮，命中率各为50%，并设各次投篮的结果相互独立。今规定每次谁投中对方就给他0.1元，如投不中则他给对方0.1元。设开始时甲有a元，乙有b元。x_n表示第n次投篮后其中一人（例如甲）的钱数。

(i) 如比赛进行到其中有一人输光为止，试证$\{x_n\}$是齐次马氏链，指出其状态空间并求转移概率。

(ii) 若不论何时当其中有一人输光时，另一个就给对方0.1元，使比赛能不停地进行下去。试写出$\{x_n\}$的状态空间及其转移概率。

10. 某赌徒在每一局中赢 1 元的概率为0.4，输 1 元的概率为0.6。如开始时此赌徒的赌本为 6 元，试求他正好赌20局输光的概率。

11. 假定明天是否下雨只取决于今天是否下雨。再设若今天下雨，则明天也下雨的概率为0.7。若今天不下雨，则明天下雨的概率为0.3。已知今天下雨的可能性为50%，试求从现在起连续三天都下雨的概率。

12. 设(p_{ij})为齐次马氏链的转移矩阵且存在$0 < m$，k使$p_{ij}^{(m)} > 0$，$p_{ji}^{(k)} > 0$。试证如$p_{ii} > 0$，则存在h使对一切$n \geqslant h$有$p_{ij}^{(n)} > 0$。

13. 如存在$k > 0$，使对一切i，j有$p_{ij}^{(k)} > 0$，证明对一切$n \geqslant k$有$p_{ij}^{(n)} > 0$。

14. 设齐次马氏链的状态只有N个。如对某$k > 0$有$p_{ij}^{(k)} > 0$。证明存在$1 \leqslant n \leqslant N$使$p_{ij}^{(n)} > 0$。

15. 设$\{x_n, n \geqslant 0\}$为齐次马氏链，i为某一状态。定义随机变量

$$Y(\omega) = \max\{n;\ n \geqslant 0,\ x_k(\omega) = i,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n\}。$$

求$P(Y = m | x_0 = i)$，$m > 0$。

16. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，A为至少有两个状态的集。试问

$$P(x_{n+1}=j\,|x_{n-1}=i,\ x_n\in A)=P(x_{n+1}=j\,|x_n\in A)$$

是否成立？

17. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，$A\in\mathscr{N}^{n+1}$，证明

$$P(x_{n-1}=j\,|x_n=i,\ A)=P(x_{n-1}=j\,|x_n=i)$$

（此题指出如把马氏链的时间逆转，则仍成马氏链。但逆转后的反链不一定保持齐次性，即上式右方值可能与n有关）。

18. 如上题中的$\{x_n\}$满足$P(x_n=i)=P_i$，$n\geqslant 0$，证明

$$r_{ij}=P(x_{n-1}=j\,|x_n=i)$$

与n无关，并验证$\sum\limits_j r_{ij}=1$。

§3.2 状态的分类

（一）状态的分类

下面我们将齐次马氏链的状态按其概率性质进行分类，然后在此基础上将其状态空间分解。在确定性机械运动中其周期是众所周知的，例如北京火车站的音乐钟，每隔15分钟响一次。如令T表示钟响的时刻（单位分）的集合，则$T=\{0,15,30,45,60,\cdots\}$。周期15是集$T$中的最小正整数，也是$T$的最大公约数。在随机运动中，情况就不尽然，看下面的例子。

例1 设马氏链的状态空间为$E=\{1,2,\cdots,9\}$，各状态间的转移如图4所示（箭头上面的数字表示沿箭头方向转移时的概率)。由图可见自状态1出发，再返回状态1的可能步数（时刻）为$T=\{4,6,8,10,\cdots\}$。显然T的最大公约数为2。但$2\notin T$而由1出发经两步不能返回到1。受机械运动周期性质的启发，我们仍把2定义为状态1的周期。为此，设已给齐次马氏链$\{x_n, n\geqslant 0\}$，其转移概率为p_{ij}。

定义1 如集合$\{n: n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$不空。就称该集合的最大公约数$d=d(i)$为状态$i$的周期，并记为

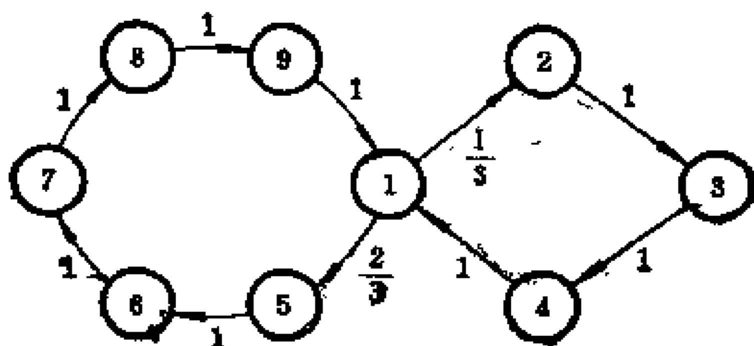


图 4

$$d=G\cdot C\cdot D\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}.$$

如 $d>1$ 就称 i 为周期的。如 $d=1$ 就称 i 为非周期的。

如果 $\{n: n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$ 为空集，就不对 i 定义周期。

由定义知，如 i 有周期 d，则对一切 $n \not\equiv 0 \bmod(d)$ 都有 $p_{ii}^{(n)}=0$。但这并不是说对任意 nd 有 $p_{ii}^{(nd)}>0$。例如例 1 中状态 1 的 $d=2$，但 $p_{11}^{(2)}=0$。虽然如此，我们有

引理1 如 i 的周期为 d，则存在正整数 M，对一切 $n\geqslant M$，有 $p_{ii}^{(nd)}>0$。

证明 记集 $\{n: n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 为 $\{n_1, n_2, \cdots\}$。令

$$t_k=G.C.D\{n_1, n_2, \cdots, n_k\},$$

易见 $t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant d\geqslant 1$，故存在正整数 N，使得 $t_N=t_{N+1}=\cdots=d$，因此 $d=G.C.D\{n_1, n_2, \cdots n_N\}$。于是根据初等数论（见习题 14）知，必存在正整数 M，对一切 $n\geqslant M$，可把 nd 表成 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ 的正线性组合，即

$$nd=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k n_k,\quad \alpha_i \text{ 为正整数}.$$

因而当 $n\geqslant M$ 时

$$p_{ii}^{(nd)}=p_{ii}^{\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k n_k\right)}\geqslant p_{ii}^{(\alpha_1 n_1)}p_{ii}^{(\alpha_2 n_2)}\cdots p_{ii}^{(\alpha_N n_N)}$$

$$\geqslant\prod_{k=1}^{N}[p_{ii}^{(n_k)}]^{\alpha_k}>0.$$

例2 设$E=\{1,2,3,4\}$，转移概率如图5所示。易见状态2与3有相同的周期$d=2$。但由状态3出发经两步必定返回到3，而状态2则不然，当第一步由2转到3后，它再也不能返回到2。为区别此两种状态，我们引入常返性概念。

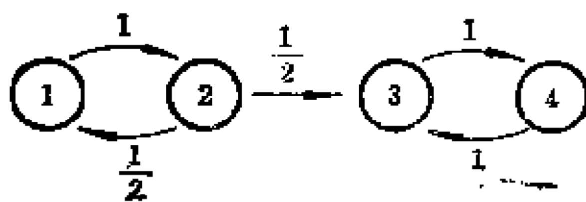


图 5

记

$$f_{ij}^{(n)}=P(x_{m+\nu}\neq j,\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1,x_{m+n}=j\mid x_m=i)$$
$$n\geqslant1, \tag{1}$$
$$f_{ij}^{(0)}=0.$$

由§3.1的(8)式，上式右方值等于

$$\sum_{\substack{s_k\neq j\\1\leqslant k\leqslant n-1}}p_{is_1}p_{s_1s_2}\cdots p_{s_{n-1}j} \tag{2}$$

与m无关。它表示质点由i出发，经n步首次到达j的概率。统称$f_{ij}^{(n)}$为**首中概率**。我们也可把(1)的右方写成

$$P(x_k\neq j,1\leqslant k\leqslant n-1,x_n=j\mid x_0=i). \tag{3}$$

当$P(x_0=i)\neq0$时，就定义(3)的值为(2)。

记

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

它表示质点由 i 出发，经有限步终于到达 j 的概率。

定义2 称状态 i 为**常返的**，如 $f_{ii}=1$。称 i 为**非常返的**，如 $f_{ii}<1$。

因此，由非常返状态 i 出发，将以正概率 $1-f_{ii}$ 永远不再返回到 i。当 i 是常返时，这种现象不会出现。对常返状态 i，$\{f_{ii}^{(n)},\ n=1,2,\cdots\}$ 成一概率分布，此分布的期望值

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

表示由 i 出发再返回到 i 的**平均回转时间**。于是可将 i 细分如下。

定义3 称常返状态 i 为**正常返的**，如 $\mu_i<\infty$。称 i 为**零常返的**，如 $\mu_i=\infty$。非周期的正常返状态称为**遍历状态**。

例3 设马氏链的 $E=\{1,2,3,4\}$，状态的转移如图6所

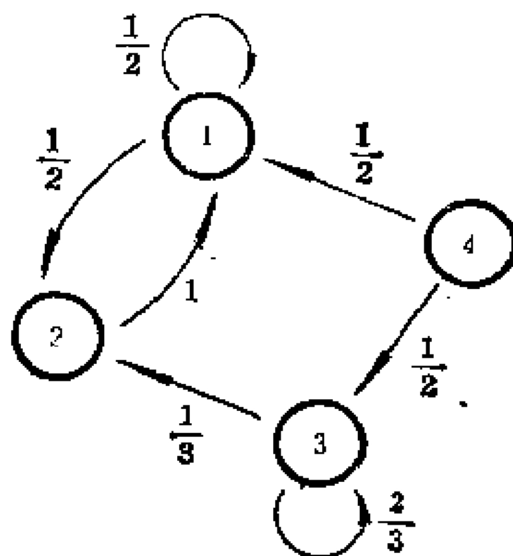


图 6

示。因 $f_{44}^{(n)}=0$，$n\geqslant 1$，故状态 4 非常返. 同理因 $f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3}$，$f_{33}^{(n)}=0$，$n\geqslant 2$，故状态 3 非常返. 其次

$$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

可见状态 1 和 2 是常返的. 其平均回转时间为

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1.0+2\cdot\frac{1}{2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=3.$$

因此 1 和 2 都是正常返状态. 易见它们都是非周期的，从而是遍历状态。

$f_{ij}^{(n)}$ 与 $p_{ij}^{(n)}$ 有如下的关系：

定理1 对任意状态 i，j 及 $1\leqslant n<\infty$，有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)} \tag{4}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(n-k)}p_{jj}^{(k)}. \tag{5}$$

证明 $p_{ij}^{(n)}=P(x_n=j\,|\,x_0=i)$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(x_v\neq j,\ 1\leqslant v\leqslant k-1,\ x_k=j,\ x_n=j\,|\,x_0=i)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(x_n=j\,|\,x_0=i,\ x_v\neq j,\ 1\leqslant v\leqslant k-1,\ x_k=j)$$

$$\cdot P(x_v\neq j,\ 1\leqslant v\leqslant k-1,\ x_k=j\,|\,x_0=i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)},$$

即得(4)式。上面最后一个等式用到§3.1定理1(c)。在(4)中以k代替$n-k$即得(5)式。

C-K方程及(4)是马氏链的关键性公式。它们把$p_{ij}^{(n)}$分解成较低步的转移概率之和的形式。由定理1我们可得周期的等价定义。

引理2 $G.C.D\{n: n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}=G.C.D\{n: n\geqslant 1,\ f_{ii}^{(n)}>0\}$。

证明 令上式左方为d，右方为t。由(4)知$p_{ii}^{(n)}\geqslant f_{ii}^{(n)}$，故上式左方集包含右方集。从而$1\leqslant d\leqslant t$。因此，如$t=1$，即得$d=t$。如$t>1$，我们证明$d\geqslant t$。为此，只需证$t$是$\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}$的公约数即可。换言之，如$n\not\equiv 0 \mod(t)$必有$p_{ii}^{(n)}=0$。我们用归纳法证之。由$t$的定义，对一切$r<t$有$f_{ii}^{(r)}=0$，所以当$n<t$时，由(4)

$$p_{ii}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot p_{ii}^{(n-k)}=0,$$

今假定当$n=mt+r$，$m=0,1,2,\cdots,N-1$时，$p_{ii}^{(n)}=0$。则由(4)并注意如$n\not\equiv 0 \mod(t)$时$f_{ii}^{(n)}=0$，我们有

$$p_{ii}^{(Nt+r)}=f_{ii}^{(t)}p_{ii}^{((N-1)t+r)}+f_{ii}^{(2t)}p_{ii}^{((N-2)t+r)}+\cdots+f_{ii}^{(Nt)}p_{ii}^{(r)}=0.$$

从而得证$d\geqslant t$。

（二）常返性的判别及其性质

本段分述如何用$p_{ij}^{(n)}$判别常返状态及其性质。设$a_0, a_1, a_2, \cdots$为一实数列，我们称幂级数

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

为数列$\{a_n\}$的**母函数**。易见，如$\{a_n\}$有界，则$A(s)$对一切$|s|<1$收敛。

设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的母函数分别为$A(s)$与$B(s)$，且对一切$|s|<1$收敛，不难证明(习题13)，

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

的母函数$C(s)=A(s)B(s)$，$|s|<1$。称$\{c_n\}$为$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的卷积。

定理2 状态i常返当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty. \tag{7}$$

如i非常返，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}. \tag{8}$$

证明 记$\{p_{ii}^{(n)}\}$及$\{f_{ii}^{(n)}\}$的母函数分别为$P(s)$及$F(s)$并约定$p_{ii}^{(0)}=1$，$f_{ii}^{(0)}=0$。由(5)

$$p_{ii}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} p_{ii}^{(k)} f_{ii}^{(n-k)}, \quad n\geqslant 1,$$

两边乘以s^n并对$n\geqslant 1$求和，与(6)比较即得

$$P(s)-1=P(s)F(s). \tag{9}$$

当$0\leqslant s<1$时，$F(s)<f_{ii}\leqslant 1$，故由(9)得

$$P(s)=\frac{1}{1-F(s)}, \quad 0\leqslant s<1. \tag{10}$$

又因对一切$0\leqslant s<1$及正整数N，有

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} s^n\leqslant P(s)\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \tag{11}$$

且当$s\uparrow 1$时$P(s)$不减，故在(11)中如先令$s\uparrow 1$，后令$N\to\infty$，我们得到

$$\lim_{s\uparrow 1} P(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \tag{12}$$

同理可证

$$\lim_{s\uparrow 1} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}. \tag{13}$$

于是在(10)中的两边令 $s \uparrow 1$，由(12)，(13)即得定理。

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$的直观意义如下。简记

$$P(\text{——}|x_0 = i) = P_i(\text{——}).$$

定义随机变量

$$y_n = \begin{cases} 1, \text{如} & x_n = i, \\ 0, \text{如} & x_n \neq i \end{cases}$$

及

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

于是Y表示质点到达i的次数。Y关于概率$P_i(\cdot)$的数学期望

$$E_i(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_i(y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(x_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

可见$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$表示由$i$出发再返回到$i$的平均次数。定理2指出，当$i$常返时，返回$i$的次数是无限多次。当$i$非常返时，再返回$i$的次数只能有限多次。为进一步理解这一特性，我们定义"超限"概率

$$\begin{aligned} g_{ij} &= P_i(\text{有无限多个}\ n\ \text{使}\ x_n = j) \\ &= P_i\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_n = j)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

定理3 状态i常返当且仅当$g_{ii} = 1$。如i非常返，则$g_{ii} = 0$。

此结论是下面定理的特殊情况。

定理4 对任意状态 i，有

$$g_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & \text{如 } j \text{ 常返,} \\ 0, & \text{如 } j \text{ 非常返.} \end{cases} \tag{15}$$

证明 令

$A_k=(\omega$：至少有 k 个 n 使 $x_n(\omega)=j$)。

易见 $A_{k+1}\subset A_k$，而且

$$\lim_{k\to\infty}P_i(A_k)=g_{ij}. \tag{16}$$

另一方面

$$P_i(A_{k+1})=P_i\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}(x_\nu\neq j,\ 0<\nu<m,\right.$$

$$\left.x_m=j \text{ 且至少有 } k \text{ 个 } n \text{ 使 } x_{m+n}=j)\right\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}P_i(x_\nu\neq j,\ 0<\nu<m,\ x_m=j)P_j$$

$$(\text{至少有 } k \text{ 个 } n \text{ 使 } x_n=j)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}^{(m)}P_j(A_k)=f_{ij}P_j(A_k). \tag{17}$$

由 i 的任意性，反复迭代(17)并注意$P_j(A_1)=f_{jj}$，我们得

$$P_i(A_{k+1})=f_{ij}\cdot f_{jj}P_j(A_{k-1})\cdots\cdots=f_{ij}(f_{jj})^k. \tag{18}$$

令 $k\to\infty$，如$f_{jj}=1$ 由(16)得$g_{ij}=f_{ij}$。如$f_{jj}<1$，则 $g_{ij}=0$。定理得证。

若 i 常返，如何识别它是遍历或零常返？下面我们不加证明地给出一个定理。

定理5 设 i 常返且有周期 d，则

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}. \tag{19}$$

其中μ_i 为 i 的平均回转时间。当$\mu_i=\infty$时就理解 $\frac{d}{\mu_i}=0$。

要知道定理的详细证明的读者可参看〔1〕64页定理2．由定理5立得

定理6 设 i 常返，则

（a） i 零常返当且仅当 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$；

（b） i 遍历当且仅当 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}>0$．

证明 （a）：如 i 零常返，由(19)知 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=0$，但当 $n\not\equiv 0 \mod(d)$ 时 $p_{ii}^{(n)}=0$．故 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$．反之，如 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$ 而 i 是正常返．则由(19)得 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}>0$，矛盾．

（b）：设 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}>0$，这说明 i 为正常返且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=\frac{1}{\mu_i}$，与(19)比较得 $d=1$，故 i 遍历．反之由定理5是显然的．

我们称自状态 i **可达**状态 j，并记为 $i\to j$，如果存在 $n>0$ 使 $p_{ij}^{(n)}>0$；称状态 i 与 j **互通**，并记为 $i\longleftrightarrow j$，如果 $i\to j$ 又 $j\to i$．

由C-K方程易知，如 $i\to j$，$j\to k$ 则 $i\to k$．即可达关系具有传递性，当 i 常返时，$i\to i$．下面证明对常返状态可达关系还具有对称性．

定理7 如 i 常返且 $i\to j$，则 j 必常返且 $f_{ji}=1$．

证明 记

$$ {}_jp_{ik}^{(n)}=P_i(x_\nu\neq j,\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1, x_n=k), $$

$$ {}_jf_{ik}^{(n)}=P_i(x_\nu\notin\{j,k\},\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1, x_n=k), $$

因为 $i\to j$，故 $f_{ij}>0$（习题2），但

$$
\begin{aligned}
f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[{}_i f_{ij}^{(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} {}_i p_{ii}^{(r)} \cdot {}_i f_{ij}^{(n-r)} \right].
\end{aligned}
$$

可见必存在N，使

$$
{}_i f_{ij}^{(N)} > 0 . \tag{20}
$$

其次

$$
0 = 1 - f_{ii} \geqslant \sum_{k \neq i} {}_i f_{ik}^{(N)} (1 - f_{ki}) \geqslant {}_i f_{ij}^{(N)} (1 - f_{ji}). \tag{21}
$$

所以由(20)，(21)知 $1 - f_{ji} = 0$，即 $f_{ji} = 1$，可见 $j \to i$。设 $p_{ij}^{(r)} = \alpha > 0$，$p_{ji}^{(s)} = \beta > 0$，则由C-K方程知，对任意 n，有

$$
p_{jj}^{(r+n+s)} \geqslant p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)} = \alpha\beta p_{ii}^{(n)}. \tag{22}
$$

由定理 2 知 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$。故 j 常返。

下一定理指出互通的状态是同一类型的。

定理8 如 $i \longleftrightarrow j$，则

(a) i 与 j 同为常返或非常返，如为常返，则它们同为正常返或零常返；

(b) i 与 j 有相同的周期。

证明 (a) (a)的前一部分是定理 7 的直接推论。今设 j 为零常返。据定理 6，$\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$。于是由(22)得 $\lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$。故 i 也是零常返。同理可证，如 i 为零常返，由

$$
p_{ii}^{(n+r+s)} \geqslant p_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(s)} = \beta\alpha P_{jj}^{(n)} \tag{23}
$$

可知 j 也是零常返。

(b) 仍令 $\alpha = p_{ij}^{(r)} > 0$，$\beta = p_{ji}^{(s)} > 0$。设 i 的周期为 d，j 的周期为 t。由(23)知，对任一使 $p_{jj}^{(n)} > 0$ 的 n，必有 $p_{ii}^{(n+r+s)} > 0$，从而 d 可除尽 $n + r + s$，但

$$p_{jj}^{(r+s)} \geqslant p_{ji}^{(s)} p_{ij}^{(r)} = \alpha\beta > 0,$$

所以 d 也能除尽 $r+s$。可见 d 可除尽 n，这说明 $d \leqslant t$。利用(22)类似可证 $d \geqslant t$，因而 $d = t$。

例4 设马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间为 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$，转移概率为

$$p_{00} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,i+1} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \in E.$$

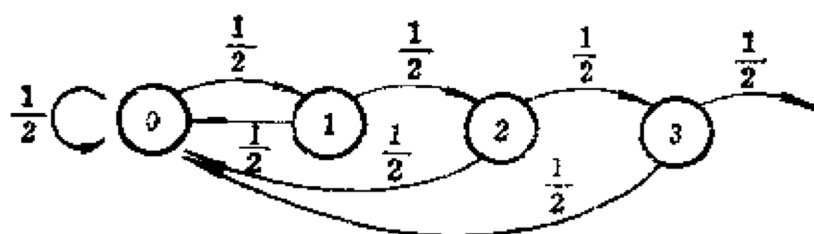


图 7

考查状态0，由图7易知 $f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$，$f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，$f_{00}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$，一般有 $f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2^n}$，故 $f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$，可见0是常返的。其次 $\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n} < \infty$，故0为正常返，由于 $p_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$，所以它是非周期的，从而是遍历的。对其它的状态 i 求 $f_{ii}^{(n)}$ 较烦，但如利用定理8，因 $i \longleftrightarrow 0$，故 i 也是遍历的。

此例告诉我们，对互通的状态因是同类型，故可选出其中一个较容易识别的进行判断即可。

例5 设 $\{x_n\}$ 为生灭链（§3.1例5）。其中 $x_0 = 1$，$a_i > 0$（$i \geqslant 1$），$b_i > 0$（$i \geqslant 0$）。如

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k} = \infty, \tag{24}$$

则$\{x_n\}$的所有状态是常返的。

实际上$\{x_n\}$的状态互通，故只需验证状态 0 是常返即可。定义

$$\tau_i = \min\{n : x_n = i\}.$$

对固定的状态 k，记

$$u(i) = P_i(\tau_0 < \tau_k), \quad 0 \le i < k,$$

则

$$u(i) = b_i u(i+1) + a_i u(i-1) + r_i u(i), \; 0 < i < k.$$

因为 $r_i = 1 - a_i - b_i$，所以由上式得

$$u(i+1) - u(i) = \frac{a_i}{b_i}[u(i) - u(i-1)]$$

$$= \frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}[u(i-1) - u(i-2)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$= \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_1}{b_i b_{i-1} \cdots b_1}[u(1) - u(0)].$$

令 $\beta_0 = 1$，$\beta_i = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_i}{b_1 b_2 \cdots b_i}$，$u(0) = 1$，由上式得

$$u(i) - u(i+1) = \beta_i [1 - u(1)], \quad 0 \leqslant i < k. \tag{25}$$

上式两边对 $i = 0, 1, \cdots, k-1$ 求和，注意 $u(k) = 0$，我们得

$$1 = [1 - u(1)] \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i. \tag{26}$$

由(25)，(26)得

$$u(i) = \sum_{j=i}^{k-1} [u(j) - u(j+1)]$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \Big/ \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j. \tag{27}$$

因为$(\tau_0<\tau_k) \uparrow (\tau_0<\infty)$，故由(24)，(27)得

$$P_1(\tau_0<\infty)=\lim_{k\to\infty} P_1(\tau_0<\tau_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{ \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \Big/ \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{ 1 - \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \right)^{-1} \right\} = 1. \tag{28}$$

但$P_1(\tau_0<\infty)=f_{1,0}$。故由

$$f_{00}=p_{00}+p_{01}f_{10}=r_0+b_0=1$$

即知状态 0 是常返的。

由上可见如生灭链的$a_i \geqslant b_i > 0$，它是常返链。我们注意(24)式也是$\{x_n\}$为常返链的必要条件。实际上，如状态 0 常返，由定理 7 知 $f_{1,0}=1$。于是由(28)我们有

$$1 = \lim_{k\to\infty}\left\{ 1 - \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \right)^{-1} \right\},$$

因此(24)成立。

由于状态的常返性与初始分布无关，因此假设$x_0=1$不会影响结果的一般性。

习　题

1. 证明定理 1 的(5)式。

2. 证明 $i \to j$ 等价于$f_{ij}>0$。

3. 证明

(a) 如 $P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$的第 j 列元素全不为零，则$P^{(m+1)}$的第 j 列元素也全不为零。

(b) 如存在 m 对一切 i $p_{ij}^{(m)}>0$，则 j 非周期。

4. 试写出以$E=\{1, 2, \cdots 9\}$为状态空间的马氏链的转移矩阵，使{1，

4，7}成一闭集，各有周期2，状态{2，3，5}成非周期的闭集，9为吸收状态，其余的为非常返状态。(闭集的定义见下节。)

5．试证明或举一反例：

(a) 如 $i\to j$ 就有 $j\to i$，则 i 必常返；

(b) 如 i 非常返且 $i\to j$，则 j 非常返；

(c) 如 j 非常返且 $i\to j$，则 i 非常返；

(d) 如马氏链的状态共有 m 个，且彼此互通，则 m 可以被状态的周期整除。

6．如马氏链的状态空间有限，上题中的(a)如何？

7．

设 $E=\{1,2,3,4\}$，　$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

(a) 此链的状态是否互通？哪些是常返状态？

(b) 求状态1的周期及平均回转时间。

8．设 $E=\{1,2,3,4\}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$。

(a) 哪些状态是常返的？周期的？

(b) 求常返状态的平均回转时间。

9．设马氏链的某一状态 i 有 $f_{ii}^{(n)}=\frac{n}{2^{n+1}}$，$n=0,1,2,\cdots$。

(a) i 是否常返？求其周期；

(b) i 是否遍历？

10．设 $E=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$p_{i,i+1}=\frac{1}{2}$，$p_{i,i-1}=\frac{1}{2}$。

(a) 此链的状态是否互通？

(b) 对状态分类，求各状态的周期及常返状态的平均回转时间。

提示 $p_{ii}^{(2n+1)}=0$，$p_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^{n}$。利用斯特灵公式 $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}$ 计算 $p_{ii}^{(2n)}$。

11. 定义**限制概率** $h_{ij}^{(n)}$ 如下：

$$h_{ij}^{(1)}=p_{ij},$$

$$h_{ij}^{(n)}=P_i(x_\nu\neq i,\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1,\ x_n=j)。$$

试证对任意 $i\neq j$ 及 $n\geqslant 1$，有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}p_{ii}^{(k)}h_{ij}^{(n-k)}。$$

12. 假设同上题，令 $h_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}h_{ij}^{(n)}$。证明 $i\to j$ 等价于 $h_{ij}>0$。

13. 设数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的母函数分别为 $A(s)$ 及 $B(s)$，且当 $|s|<1$ 时收敛。证明数列

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},\quad n=0,1,2,\cdots$$

的母函数 $C(s)=A(s)B(s)$，$|s|<1$。

提示
$$A(s)B(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}b_{k-n}s^{k-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n\sum_{k=0}^{\infty}b_{k-n}s^{k-n},$$

其中定义 $b_m=0$，$m<0$。于是上式右方

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_{k-n}s^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_{k-n}\right)s^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k。$$

14. 设$n_1, n_2, \cdots, n_N$为正整数，$d = G\cdot C\cdot D\{n_1, \cdots, n_N\}$。证明存在整数$M$，对一切整数$m \geqslant M$都可把$md$表示为$\{n_i\}$的正线性组合，即

$$md = \sum_{i=1}^{N} a_i n_i, \quad a_i\text{为整数。}$$

提示 令$n_i = db_i$。于是$1 = G\cdot C\cdot D\{b_1, b_2, \cdots, b_N\}$。故必存在整数$k_i$(不一定正整数)，使

$$1 = \sum_{i=1}^{N} k_i b_i.$$

令 $u = \sum_{i=1}^{N} b_i$. 则对任一整数$m > 0$，由

$$m = qu + r, \quad 0 \leqslant r < u, \quad q \geqslant 0 \text{ 整数}$$

可知

$$m = q\cdot\sum_{i=1}^{N} b_i + r\cdot\sum_{i=1}^{N} k_i b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (q + rk_i) b_i.$$

选取足够大的m，使$q \geqslant u\,|k_i|$，$i = 1, 2, \cdots, N$。则得$q + rk_i > 0$。从而得

$$md = \sum_{i=1}^{N} a_i n_i, \quad a_i > 0.$$

§3.3 状态空间的分解

定义1 状态空间E的子集C称为(随机)闭集，如对任意$i \in C$及$k \notin C$都有$p_{ik} = 0$。闭集C称为**不可分**的，如C的状态互通。马氏链$\{x_n\}$称为**不可分**的，如其状态空间不可分。

引理1 C是闭集的充要条件为对任意$i \in C$及$k \notin C$都有$p_{ik}^{(n)} = 0$，$n \geqslant 1$。

证明 只需证必要性，我们用归纳法证之。设C为闭集，由

定义，当 $n=1$ 时结论成立。今设对 $n=m$，$p_{ik}^{(m)}=0$，$i\in C$，$k\notin C$。则

$$p_{ik}^{(m+1)}=\sum_{j\in C} p_{ij}^{(m)}\cdot p_{jk}+\sum_{j\notin C} p_{ij}^{(m)}\cdot p_{jk}$$

$$=\sum_{j\in C} p_{ij}^{(m)}\cdot 0+\sum_{j\notin C} 0\cdot p_{jk}=0.$$

引理得证。

闭集的意思即自 C 的内部不能到达 C 的外部．这意味着一旦质点进入闭集 C 中，它就将永远留在 C 中运动。

称状态 i 为吸收的，如 $p_{ii}=1$。易见 i 吸收等价于单点集 $\{i\}$ 是闭集。

例1 设马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4,5\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

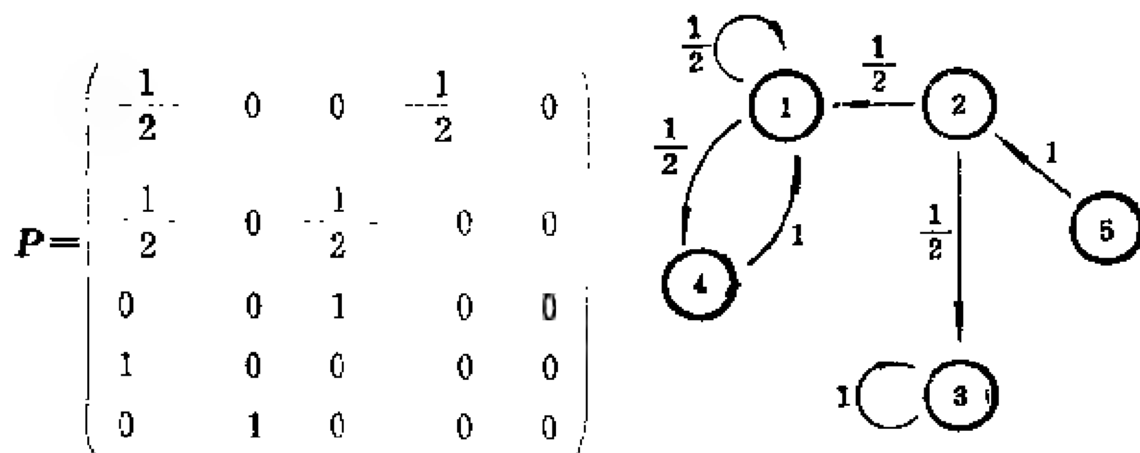


图 8

由图 8 知状态 3 是吸收的，故 $\{3\}$ 是闭集。$\{1,4\}$，$\{1,4,3\}$，$\{1,2,3,4\}$ 都是闭集．其中 $\{3\}$ 及 $\{1,4\}$ 是不可分的。又因 E 含有闭子集，故 $\{x_n\}$ 非不可分链。

例2 艾伦费斯特链（§3.1例6）为不可分马氏链，各状态的周期为 2 且是正常返的（§3.4定理 1 系）。

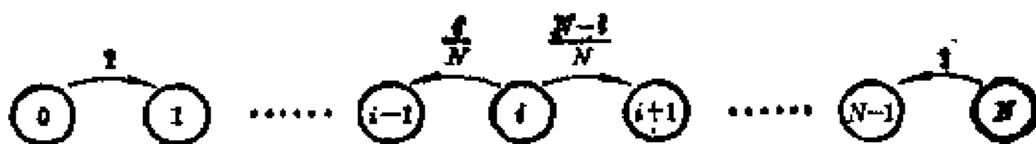


图 9

上节定理 7 指出自常返状态只能到达常返状态，因此E中全体常返状态组成一闭集C。在C中可达关系具有自返性（即$i\to i$），对称性（即如$i\to j$，则$j\to i$）和传递性，因而它决定一分类关系。于是我们可将C按互通关系分解而得E的分解定理如下：

定理1 任一马氏链的状态空间E，可唯一地分解成有限个或可列多个互不相交的子集D，C_1，C_2，…之和，使得

（i）每一C_n是常返状态组成的不可分闭集。

（ii）C_n中的状态同类，或全是正常返，或全是零常返。它们有相同的周期且$f_{jk}=1$，j，$k\in C_n$。

（iii）D由全体非常返状态组成。自C_n中的状态不能到达D中的状态。

证明 记C为全体常返状态所成的集合，$D=E-C$为非常返状态全体。将C按互通关系进行分解，整个状态空间E可分解成

$$E=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots,$$

其中，每一个C_n是由常返状态组成的不可分的闭集，且由前节定理 8 知C_n中的状态同类型。显然，自C_n中的状态不能到达D中状态。

以后我们称C_n为**基本常返闭集**。分解定理中的集D不一定是闭集，但如E为有限集，D一定是非闭集（习题 1）。因此，如最初质点是自某一非常返状态出发，则它可能就一直在D中运动（当D是闭集），也可能在某一时刻离开D转移到某一基本常返闭

集C_n中。一但质点进入C_n后，它就将永远在此C_n中运动。自然如一开始质点是自常返状态i出发，它就只能在含i的基本常返闭集内运动。我们将在下一定理进一步指出质点在C_n中是如何运动的。其次，我们以习题的形式（习题7—12）给出非常返状态的一些性质。

例3 设$\{x_n\}$为§3.2例3的马氏链，则

$$E=D\cup C,$$

其中$D=\{3, 4\}$，$C=\{1, 2\}$，D非闭集。

例4 设$E=\{1, 2, \cdots, 6\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试分解此链并指出各状态的常返性及其周期。

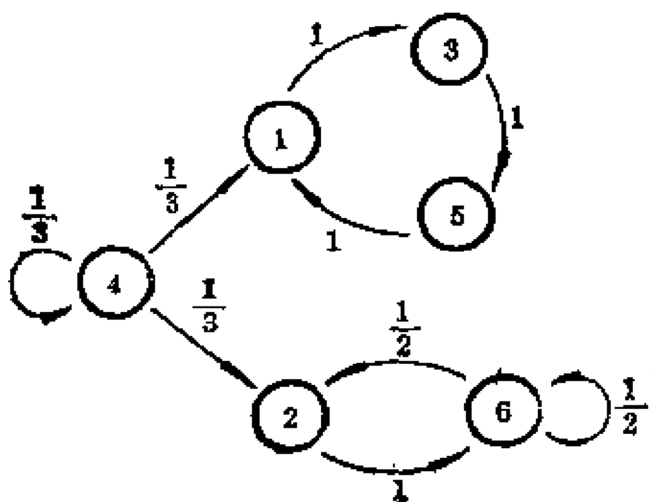


图 10

解 由图10知 $f_{11}^{(3)}=1$，$f_{11}^{(n)}=0$，$n\neq 3$。故 $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}^{(n)}=3$，可见1为正常返状态且周期等于3。含1的基本常返闭集为

$$C_1=\{k: 1\to k\}$$
$$=\{1,\ 3,\ 5\},$$

从而状态3及5也为正常返且周期等于3。同理可知6为正常返状态，$\mu_6=\frac{3}{2}$，其周期为1。含6的基本常返闭集为

$$C_2=\{k: 6\to k\}$$
$$=\{2,\ 6\},$$

可见2是遍历状态。由于 $f_{44}^{(1)}=\frac{1}{3}$，$f_{44}^{(n)}=0$，$n\neq 1$，故4非常返，周期为1。于是E可分解为

$$E=D\cup C_1\cup C_2$$
$$=\{4\}\cup\{1,\ 3,\ 5\}\cup\{2,\ 6\}.$$

定义2 称矩阵 (a_{ij}) 为**随机矩阵**，如其元素非负且对每一i有 $\sum_j a_{ij}=1$。

显然k步转移矩阵 $\mathbf{P}^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$ 为随机矩阵。

引理2 设C为闭集，则只考虑在C上所得的k步转移子矩阵$C=(p_{ij}^{(k)})$，i，$j\in C$，它仍是随机矩阵。

证明 任取 $i\in C$，由引理1我们有

$$1=\sum_{j\in E} p_{ij}^{(k)}=\sum_{j\in C} p_{ij}^{(k)}+\sum_{j\notin C} p_{ij}^{(k)}=\sum_{j\in C} p_{ij}^{(k)},$$

显然$p_{ij}^{(k)}\geqslant 0$，故C为随机矩阵。

由此可见，给定E的一个闭子集C，只考虑在C上可得原马氏链的子马氏链（初始分布未定）。其状态空间为C，转移矩阵

$C=(p_{ij})$， i，$j\in C$是原马氏链转移矩阵$P=(p_{ij})$， i，$j\in E$的子矩阵。下面我们研究当C为不可分闭集时，质点在C中的运动情况。

定理 2　周期为d的不可分马氏链，其状态空间C可唯一地分解为d个互不相交的子集之和。即

$$C=\bigcup_{r=0}^{d-1} G_r,\ G_r\cap G_s=\varnothing,\ \ r\neq s \qquad (1)$$

且使得自G_r中任一状态出发，经一步转移必进入G_{r+1}中（这里理解$G_d=G_0$）。

证明　任意取定一状态i，对每一$r=0，1，2，\cdots，d-1$定义集

$G_r=\{j：对某\ n\geqslant 0,\ p_{ij}^{(nd+r)}>0\}$，

因C不可分，故$\bigcup_{r=0}^{d-1} G_r=C$。

其次，如存在$j\in G_r\cap G_s$，由（2）必存在n及m使$p_{ij}^{(nd+r)}>0$，$p_{ij}^{(md+s)}>0$。又因$j\leftrightarrow i$，故存在h使$p_{ji}^{(h)}>0$，于是

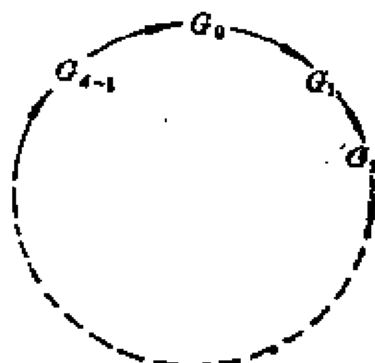


图　11

$$p_{ii}^{(nd+r+h)}\geqslant p_{ij}^{(nd+r)}p_{ji}^{(h)}>0,$$
$$p_{ii}^{(md+s+h)}\geqslant p_{ij}^{(md+s)}p_{ji}^{(h)}>0.$$

由此可见$r+h$及$s+h$都能被d除尽，从而其差$(r+h)-(s+h)=r-s$也可被d除尽。但$0\leqslant r$，$s\leqslant d-1$，故只能$r-s=0$，因而$G_r=G_s$。这说明当$r\neq s$时$G_r\cap G_s=\varnothing$。

下证对任一$j\in G_r$，有$\sum\limits_{k\in G_{r+1}} p_{jk}=1$。实际上

$$1=\sum_{k\in C} p_{jk}=\sum_{k\in G_{r+1}} p_{jk}+\sum_{k\notin G_{r+1}} p_{jk}=\sum_{k\in G_{r+1}} p_{jk}.$$

最后一个等式是因设$p_{ij}^{(nd+r)}>0$，故当$k\notin G_{r+1}$时，由

$$0=p_{ik}^{(nd+r+1)}\geqslant p_{ij}^{(nd+r)}p_{jk}$$

知
$$p_{jk}=0.$$

剩下证明分解的唯一性，这只需证$\{G_r\}$与最初i的选择无关，亦即如对某固定的i，状态j与k同属于某G_r，则对另选定的i'，状态j与k仍属于同一$G_{r'}$（r'与r可以不同）。实际上，设对i分得G_0，G_1，…，G_{d-1}，对i'分得G_0'，G_1'，…，G_{d-1}'，又假定j，$k\in G_r$，$i'\in G_s$。则

当$r\geqslant s$时，自i'出发，只能在$r-s$，$r-s+d$，$r-s+2d$，…等步上到达j或k，故j与k都属于G_{r-s}'。

当$r<s$时，自i'出发，只能在$d-(s-r)=r-s+d$，$r-s+2d$，$r-s+3d$，…等步上到达j或k，故j与k都属于G_{r-s+d}'，定理证毕。

例5 设不可分马氏链的状态空间为$C=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

由图12易见各状态的周期$d=3$。今固定状态$i=1$，令

$$G_0=\{j: 对某\ n\geqslant 0\ 有\ p_{1,j}^{(3n)}>0\}$$
$$=\{1,4,6\},$$
$$G_1=\{j: 对某\ n\geqslant 0\ 有\ p_{1,j}^{(3n+1)}>0\}$$

$$=\{3,\ 5\},$$

$$G_2=\{j:\text{对某}\ n\geqslant 0\ \text{有}\ p_{1,j}^{(3n+2)}>0\}$$

$$=\{2\},$$

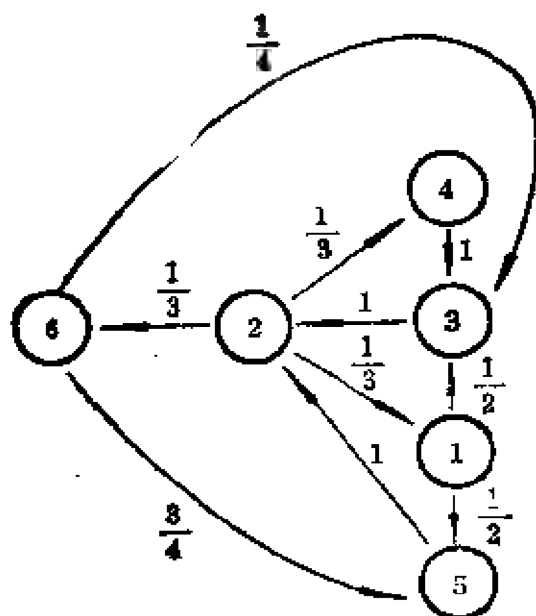


图 12

故

$$C=\{1,\ 4,\ 6\}\cup\{3,\ 5\}\cup\{2\}.$$

此链在C中的运动如图13所示.

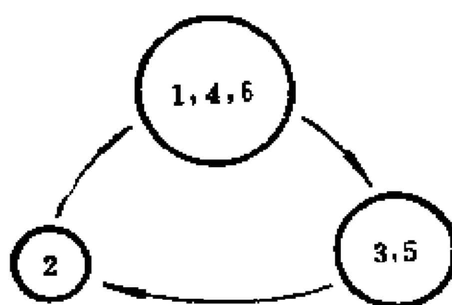


图 13

由定理 2 可得.

定理 3 假设与定理 2 相同，则

（a）如只在时刻 0，d，$2d$，$3d$，…上考虑 $\{x_n\}$，即得一新的马氏链 $\{x_{nd},\ n\geqslant 0\}$，其转移矩阵为 $P^{(d)}=(p_{ij}^{(d)})$。对此新链，每一 G_r 是不可分闭集，且 G_r 中的状态是非周期的。

（b）如原马氏链 $\{x_n\}$ 常返，$\{x_{nd}\}$ 也常返。

证明 （a）由定理 2 得知 G_r 对 $\{x_{nd}\}$ 是闭集。其次对任意 j，$k\in G_r$，因 $\{x_n\}$ 不可分，故存在 N 使 $p_{jk}^{(N)}>0$。由定理 2 知 N 只能是 nd 形，换言之，对 $\{x_{nd}\}$ 状态 $j\to k$，同理 $k\to j$，故 $j\leftrightarrow k$ 即 G_r 不可分。据 § 3.2 引理 1，存在 M 对一切 $n\geqslant M$，有 $p_{jj}^{(nd)}>0$，可见对 $\{x_{nd}\}$ 状态 j 的周期为 1。

（b）设 $\{x_n\}$ 常返，任取 $j\in G_r$，由周期的定义知，当 $n\not\equiv 0 \bmod(d)$ 时 $p_{jj}^{(n)}=0$，因而 $f_{jj}^{(n)}=0$，故

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)},$$

即 j 对 $\{x_{nd}\}$ 也是常返的。

例 6 设 $\{x_n\}$ 为例 5 的马氏链，已知 $d=3$，$\{x_{3n},\ n\geqslant 0\}$ 的转移矩阵为

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

由状态的转移图14易见，在新链 $\{x_{3n}\}$ 中，$G_0=\{1,\ 4,\ 6\}$，$G_1=\{3,\ 5\}$，$G_2=\{2\}$ 各形成不可分闭集，周期为 1。

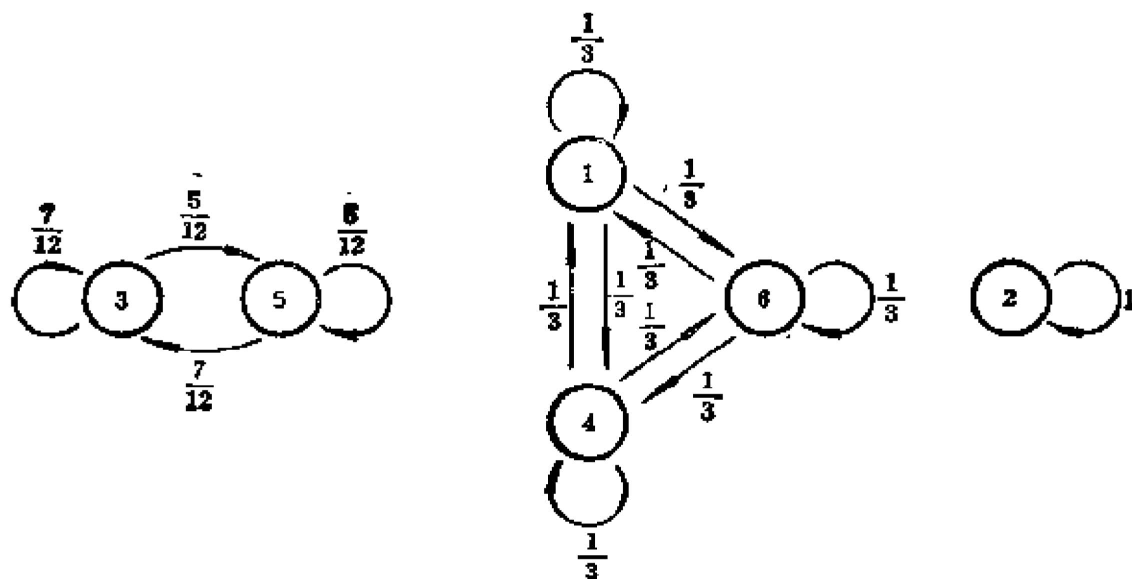


图 14

习　题

1．设D为马氏链的非常返状态全体。如D是有限集，试证D必非闭集。

2．证明闭集C不可分的充要条件为C不含非空的闭真子集。

3．称子集$D\subset E$为（随机）开集，如对任意状态$i\in D$，存在$k\notin D$使$i\to k$。证明D为开集等价于不存在非空闭子集$F\subseteq D$。

4．设马氏链的状态空间E可分解为

$$E=D\cup\{i_0\},$$

其中i_0为吸收状态，D为开集。证明D中的状态全是非常返的。

5．设$E=\{1,2,3,4\}$，

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},$$

试分解此链。

6．设$E=\{1,2,3,4,5\}$

$$
P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

试分解此链。

7. 设 j 为非常返状态，证明对一切 i 有

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty.
$$

8. 设D为马氏链的非常返状态全体。令

$Q=(p_{ij})$，$i, j \in D$。$Q^n=(p_{ij}^{(n)})$，$i, j \in D$。证明矩阵 $I-Q$ 的逆矩阵为

$$
(I-Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n,
$$

其中$Q^0=I$为单位矩阵。

提示 $(I-Q)(I+Q+Q^2+\cdots+Q^{n-1}) = I-Q^n$，由习题 4 $p_{ij}^{(n)} \to 0$。

此题给出计算自 $i \in D$ 出发，停留在D中的平均时间$m_i = \sum_{j \in D} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 的一种方法。即只需求$(I-Q)^{-1}$。

9. 设D为非常返状态全体。令

$a_i = P_i(x_n \in D,\ n=1, 2, \cdots)$，$i \in D$，

即a_i为自 i 出发永不离开D的概率。证明

(1) $\{a_i\}$是方程组 $y_i = \sum_{j \in D} p_{ij} y_j$，$i \in D$的解，

（2）$a_i=0$ 的充要条件为上述方程组没有非零的有界解。

10．设D同上题，C为基本常返闭集。令

$$f_{iC}=P_i\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n\in C)\right\},\quad i\in D,$$

即f_{iC}为自 i 出发终于进入C的概率．试证

（1）$\{f_{iC},\ i\in D\}$是方程组

$$y_i=\sum_{j\in C}p_{ij}+\sum_{j\in D}p_{ij}y_j,\quad i\in D$$

的一组解；

（2）证明上面的方程组有唯一（不全为零）的有界解之充要条件为习题6中的$a_i=0$，$i\in D$。

提示　对$i\in D$定义

$$f_{iC}^{(n)}=P_i(x_\nu\notin C,\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1,\ x_n\in C),$$

则　$f_{iC}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{iC}^{(n)}$，且$f_{iC}^{(n)}=\sum_{k\notin C}p_{ik}f_{kC}^{(n-1)}$，$f_{iC}^{(1)}=\sum_{k\in C}p_{ik}$。

第二个等式对$n=1,2,\cdots$求和即得。

11．假设与习题7相同，证明对任一$j\in C$，$f_{ij}=f_{iC}$，$i\in D$。

12．设不可分马氏链的状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$。证明E中的状态全是非常返的充要条件为方程组

$$y_i=\sum_{j\in F}p_{ij}y_j$$

有非零的有界解，其中$F=\{1,2,\cdots\}$。

§3.4　$p_{ij}^{(n)}$的渐近性质与平稳分布

本节研究$P_i(x_n=j)$的极限分布，即研究$p_{ij}^{(n)}$的渐近性质，它与马氏链的平稳分布有密切关系。有两个问题，一是$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$是否存在，二是如存在其极限是否与$i$有关。

（一）$p_{ij}^{(n)}$的渐近性质

（I）当 j 非常返或零常返时。

定理 1 如 j 非常返或零常返，则对一切 i 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0 .$$

证明 由§3.2定理 1，对$N<n$ 我们有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \leqslant \sum_{k=1}^{N} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}+\sum_{k=N+1}^{n} f_{ij}^{(k)} . \qquad (1)$$

固定N，先令 $n\to\infty$，由§3.2定理 2 及定理 6 知，上式右方第一项因$p_{jj}^{(n)}\to 0$ 而趋于 0。再令$N\to\infty$，第二项因 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}\leqslant 1$ 而趋于 0，故$p_{ij}^{(n)}\to 0$。

系 1 如马氏链的状态个数有限，则不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态。从而不可分的有限马氏链必是正常返的。

证明 设$E=\{0, 1, 2, \cdots, N\}$。如全是非常返，则对任意 i，j，由定理 1 知$p_{ij}^{(n)}\to 0$，故当 $n\to\infty$时，就有

$$1=\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)}\to 0 ,$$

这产生了矛盾。

其次，如E含有零常返状态 i，则$C=\{j: i\to j\}$是不可分闭集，它是有限集且所有的状态为零常返，于是由定理 1 知，当 $n\to\infty$时，有

$$1=\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}\to 0 , \qquad (2)$$

这产生了矛盾。

系 2 如马氏链有一个零常返状态，则必有无限多个零常返状态。

证明 设 i 为零常返，则$C=\{j: i\to j\}$为不可分闭集，其

状态全是零常返。故不能是有限集，否则同样与（2）式矛盾。

（Ⅱ）当 j 正常返时。

这时 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在也可能与 i 有关。例如 $E=\{1, 2, \cdots, 6\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

易见状态1和3是正常返的。但 $p_{11}^{(2n)}=1, p_{11}^{(2n+1)}=0$，$n=0, 1, \cdots$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}$ 不存在。$\lim\limits_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)}$ 存在但与 i 有关。实际上 $p_{33}^{(n)}=1$，$p_{53}^{(n)}=\frac{1}{2}$，$p_{13}^{(n)}=0$，$n=1, 2, \cdots$。

因此，我们退而研究 $p_{ij}^{(nd)}$ 及 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$ 的极限。回忆 $p_{jj}^{(nd)}\to\frac{d}{\mu_j}$，我们可得下面的一般性定理。记

$$f_{ij}(r)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, \quad 0\leqslant r\leqslant d-1. \tag{3}$$

它表示质点由 i 出发，在某时刻 $n\equiv r \bmod (d)$ 首次到达 j 的概率。易见

$$\sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}(r)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}^{(md+r)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)}=f_{ij}. \tag{4}$$

定理 2 如 j 正常返，周期为 d，则对任意 i 及 $0 \leqslant r \leqslant d-1$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \cdot \frac{d}{\mu_j}. \tag{5}$$

证明 因为 $p_{jj}^{(n)} = 0$，$n \not\equiv 0 \bmod(d)$。故

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^{nd+r} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(nd+r-v)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d},$$

于是，对 $1 \leqslant N < n$ 有

$$\sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} \leqslant p_{ij}^{(nd+r)}$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} + \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

在上式中先固定 N，然后令 $n\to\infty$，再令 $N\to\infty$，由 § 3.2 定理 5 即得

$$f_{ij}^{(r)} \cdot \frac{d}{\mu_j} \leqslant \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} \leqslant f_{ij}(r) \cdot \frac{d}{\mu_j}.$$

因此（5）得证。

系 设不可分、正常返、有周期 d 的马氏链，其状态空间为 C，则对一切 i，$j \in C$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \begin{cases} \dfrac{d}{\mu_j}, & \text{如 } i \text{ 与 } j \text{ 同属于子集 } G_s, \\ 0, & \text{反之,} \end{cases} \tag{6}$$

其中 $C = \bigcup_{s=0}^{d-1} G_s$ 为 § 3.3定理 2 的分解。

特别，如$d=1$，则对一切i，j有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}. \tag{7}$$

证明 在上定理中取$r=0$，我们得

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)}=f_{ij}(0)\frac{d}{\mu_j},$$

其中$f_{ij}(0)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md)}$。如$i$与$j$不在同一个$G_r$中，则由§3.3定理2，$p_{ij}^{(md)}=0$。从而$f_{ij}^{(md)}=0$，于是$f_{ij}(0)=0$。如$i$与$j$属于$G_r$，则$p_{ij}^{(n)}=0$（从而$f_{ij}^{(n)}=0$），$n\not\equiv 0 \bmod (d)$。故

$$f_{ij}(0)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md)}=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)}=f_{ij}.$$

据§3.2定理7，上式右方等于1。

（3）式中概率$f_{ij}(r)$似与个别i有关，实际上，对一切j，$k\in G_r$都有$f_{ij}(r)=f_{ik}(r)$，即$f_{ij}(r)$只依赖于j所在的子集G_r（习题10）。

我们知道$\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}$表示自$j$出发，在前$n$个单位时间（即前$n$步）再回到$j$的平均次数，故$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}$表示每单位时间内再回到$j$的平均次数。因为$\frac{1}{\mu_j}$也表示自$j$出发每单位时间回到$j$的平均次数，所以应有$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}\approx\frac{1}{\mu_j}$。如果质点由$i$出发，就要考虑自$i$是否能到达$j$的情况，即要考虑$f_{ij}$的大小。于是我们有

定理 3 对任意状态 i，j，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0, & \text{如 } j \text{ 非常返或零常返,}\\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_j}, & \text{如 } j \text{ 正常返.}\end{cases}$$

证明 如 j 为非常返或零常返，由定理 1 知 $p_{ij}^{(n)}\to 0$，所以 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}\to 0$ $(n\to\infty)$。如 j 正常返，有周期 d，我们应用下面一个事实：假设有 d 个数列 $\{a_{nd+s}\}$，$s=0,1,2,\cdots,d-1$。如对每一 s，存在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nd+s}=b_s$，则必有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_k=\frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1}b_s. \tag{8}$$

在（8）中令 $a_{nd+s}=p_{ij}^{(nd+s)}$，由定理 2 知 $b_s=f_{ij}(s)\frac{d}{\mu_j}$。于是得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}&=\frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1}f_{ij}(s)\frac{d}{\mu_j}\\ &=\frac{1}{\mu_j}\sum_{s=0}^{d-1}f_{ij}(s)\\ &=f_{ij}/\mu_j.\end{aligned}$$

系 如$\{x_n\}$不可分、常返，则对任意 i，j，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}.$$

当$\mu_j=\infty$时，理解$\frac{1}{\mu_j}=0$。

定理 3 及系指出，当 j 正常返时，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，但其平均值的极限恒存在，且当链不可分时，这极限与 i

无关。在马氏链理论中，μ_j是一个重要的量。我们可根据定义求出μ_j，也可由$\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_j}$用$p_{jj}^{(nd)}$近似计算$\mu_j$。下面是求$\mu_j$的另一种方法。

定理 4 设$\{x_n\}$为不可分遍历链（即所有的状态遍历）。则$\left\{\pi_k = \frac{1}{\mu_k}\right\}$是方程组

$$y_j = \sum_{k=0}^{\infty} y_k p_{kj} \tag{9}$$

满足条件

$$y_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} y_j = 1 \tag{10}$$

的唯一解。

证明 令$\pi_k = \frac{1}{\mu_k}$。由定理 2 系知 $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$。于是对固定的正整数M，在 $\sum\limits_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} \leqslant 1$ 中先令 $n\to\infty$，再令$M\to\infty$，我们得

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leqslant 1. \tag{11}$$

由 C-K方程

$$p_{ij}^{(n+1)} \geqslant \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

同上，先令 $n\to\infty$，后令$M\to\infty$，可得

$$\pi_j \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}. \tag{12}$$

倘若（12）式中有一个 j 使等号不成立，经两边对 j 求和，由

(11) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k$收敛，我们得

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j>\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k p_{kj}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_k p_{kj}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k\cdot\sum_{j=0}^{\infty}p_{kj}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k. \tag{13}$$

故上式矛盾。从而对一切 j 有

$$\pi_j=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k p_{kj}, \tag{14}$$

即 $\{\pi_j\}$ 满足方程组（9）。其次，反复运用（14）式，可得

$$\pi_j=\sum_k\pi_k p_{kj}$$
$$=\sum_k\left(\sum_i\pi_i p_{ik}\right)p_{kj}$$
$$=\sum_i\pi_i p_{ij}^{(2)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$=\sum_i\pi_i p_{ij}^{(n)}. \tag{15}$$

令 $n\to\infty$，由控制收敛定理得

$$\pi_j=\left(\sum_i\pi_i\right)\pi_j.$$

因为$\pi_i>0$，故由上式得证$\sum_i \pi_i=1$。即$\{\pi_j\}$满足（10）。

剩下证唯一性。设$\{\omega_i\}$为方程组（9）的满足条件（10）的解。仿照（15）式的推导，可知

$$\omega_j=\sum_i \omega_i p_{ij}^{(n)}, \tag{16}$$

令$n\to\infty$得

$$\omega_j=\left(\sum_i \omega_i\right)\pi_j=\pi_j.$$

（二）平稳分布

定义 1 设(p_{ij})为马氏链$\{x_n\}$的转移矩阵，如非负数列$\{\pi_k\}$满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k=1, \quad \pi_k=\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ik}, \quad k\geqslant 0, \tag{17}$$

就称$\{\pi_k\}$为$\{x_n\}$的**平稳分布**。

定理 4 指出，不可分的遍历链恒有唯一的平稳分布，此分布即是$\left\{\frac{1}{\mu_k}\right\}$。实际上这结论对不可分的正常返链也成立（定理 6 系 1）。下面我们证明，以其平稳分布为初始分布的马氏链是一平稳过程。

定理 5 设$\{\pi_k\}$为马氏链$\{x_n\}$的平稳分布，如果

$$P(x_0=k)=\pi_k, \quad k=0, 1, 2, \cdots,$$

则$P(x_n=k)=\pi_k$，$n\geqslant 1$，而且对任意正整数n，l及状态j_ν，$0\leqslant \nu\leqslant l$，有

$$P(x_{n+\nu}=j_\nu, \quad 0\leqslant \nu\leqslant l)=P(x_\nu=j_\nu, \quad 0\leqslant \nu\leqslant l).$$

证明

$$P(x_n=k)=\sum_j P(x_0=j)p_{jk}^{(n)}=\sum_j \pi_j p_{jk}^{(n)}=\pi_k.$$

最后一等式由（15）而得。其次由§3.1引理2

$$P(x_{n+\nu}=j_\nu,\quad 0\leqslant\nu\leqslant l)=P(x_n=j_0)p_{j_0j_1}\cdots p_{j_{l-1}j_l}$$
$$=P(x_0=j_0)p_{j_0j_1}\cdots p_{j_{l-1}j_l}$$
$$=P(x_\nu=j_\nu,\quad 0\leqslant\nu\leqslant l).$$

对一般的马氏链，其平稳分布是否存在？如存在，是否唯一？下面的定理6解决了这问题，同时指出了平稳分布的构造。为此先证两个引理。

设状态空间E已分解成

$$E=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$$
$$=Q\cup H,$$

其中Q为非常返及零常返状态全体，$H=\bigcup\limits_{\alpha}C_\alpha$，每个$C_\alpha$为基本正常返闭集。

引理1 对每一$C_\alpha\subset H$有 $\sum\limits_{j\in C_\alpha}\dfrac{1}{\mu_j}=1$.

证明 设C_α中的状态有周期d。将C_α按§3.3定理2分解为

$$C_\alpha=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r.$$

由本节定理2系，对任意i，$j\in G_r$。我们有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_j}.$$

由§3.3定理3，对P^d每个G_r都是周期为1的不可分闭集。故据定理4$\left(\text{此时}\pi_k=\dfrac{d}{\mu_k}\right)$知

$$\sum_{j\in G_r}\frac{d}{\mu_j}=1,$$

因此

$$\sum_{j\in C_\alpha}\frac{1}{\mu_j}=\sum_{r=0}^{d-1}\sum_{j\in G_r}\frac{1}{\mu_j}$$

$$=\sum_{r=0}^{d-1}\frac{1}{d}=1.$$

引理 2 设$\{\omega_j\}$为马氏链$\{x_n\}$的平稳分布，则

(a) $\omega_j=0$, $j\in Q$;

(b) $\omega_j=\frac{\lambda_\alpha}{\mu_j}$, $j\in C_\alpha$，其中 λ_α 为满足$\sum\limits_\alpha\lambda_\alpha=1$的常数。

证明 (a) 当$j\in Q$时，由定理1 $p_{ij}^{(n)}\to 0$。在(16)式中令$n\to\infty$即得$\omega_j=0$。

(b) 设$j\in C_\alpha$。由C_α的闭性及(a)，我们有

$$\omega_j=\sum_{i\in H}\omega_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in C_\alpha}\omega_i p_{ij}^{(n)},$$

上式两边对$n=1, 2, \cdots, N$求和，得

$$\omega_j=\sum_{i\in C_\alpha}\omega_i\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_{ij}^{(n)}\right\}.$$

令$N\to\infty$。由定理3系，得

$$\omega_j=\left(\sum_{i\in C_\alpha}\omega_i\right)\frac{1}{\mu_j}=\lambda_\alpha\cdot\frac{1}{\mu_j},$$

其中$\lambda_\alpha=\sum\limits_{i\in C_\alpha}\omega_i$。显然$\sum\limits_\alpha\lambda_\alpha=\sum\limits_\alpha\sum\limits_{i\in C_\alpha}\omega_i=\sum\limits_{i\in H}\omega_i=1$。

定理 6 设$\omega_j\geqslant 0$且$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\omega_j<\infty$。则$\{\omega_j\}$是马氏链的平稳分布的充要条件为存在非负数列$\{\lambda_\alpha\}$，使得

(a) $\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}=1$;

(b) $\omega_j=0$, $j\in Q$;

(c) $\omega_j=\frac{\lambda_\alpha}{\mu_j}$, $j\in C_\alpha$.

证明 必要性 引理2已证。今设存在 $\{\lambda_\alpha\}$ 满足(a)—(c)。则

$$\sum_j \omega_j=\sum_{j\in H}\omega_j=\sum_\alpha\sum_{j\in C_\alpha}\frac{\lambda_\alpha}{\mu_j}$$

$$=\sum_\alpha\lambda_\alpha\left(\sum_{j\in C_\alpha}\frac{1}{\mu_j}\right).$$

由引理1知，上式右方等于 $\sum\limits_\alpha\lambda_\alpha=1$。下证 $\{\omega_j\}$ 是方程(17)的解。

当 $j\in Q$ 时，因 H 是闭集及(b)，我们有

$$\sum_i \omega_i p_{ij}=\sum_{i\in H}\omega_i p_{ij}+\sum_{i\in Q}\omega_i p_{ij}$$

$$=0=\omega_j.$$

当 $j\in H$ 时，设 $j\in C_\alpha$。注意，当 $i\in H$，$i\notin C_\alpha$ 时 $p_{ij}=0$，我们得

$$\sum_i \omega_i p_{ij}=\sum_{i\in H}\omega_i p_{ij}=\sum_{i\in C_\alpha}\omega_i p_{ij}$$

$$=\lambda_\alpha\left(\sum_{i\in C_\alpha}\frac{1}{\mu_i}p_{ij}\right). \tag{18}$$

由引理1，对任给的 $\varepsilon>0$，存在只含有限多个状态的集 $B_\alpha\subset C_\alpha$，使

$$\lambda_\alpha\left(\sum_{i\in C_\alpha-B_\alpha}\frac{1}{\mu_i}\right)<\varepsilon,$$

因此，由（18）式

$$\sum_i \omega_i p_{ij}<\lambda_\alpha\left(\sum_{i\in B_\alpha}\frac{1}{\mu_i}p_{ij}\right)+\varepsilon. \tag{19}$$

任取 $k\in C_\alpha$，由定理 3，我们有

$$\sum_{i\in B_\alpha}\frac{p_{ij}}{\mu_i}=\sum_{i\in B_\alpha}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}p_{ki}^{(v)}\right\}p_{ij}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}p_{kj}^{(v+1)}=\frac{1}{\mu_j}. \tag{20}$$

于是，由（19），（20）及 ε 的任意性，得

$$\sum_i \omega_i p_{ij}\leqslant\frac{\lambda_\alpha}{\mu_j}=\omega_j. \tag{21}$$

倘若（21）中有一个 j 使等号不成立，因为 $\sum\omega_i<\infty$，将（24）两边对 j 求和，得

$$\sum_i \omega_i<\sum_j \omega_j,$$

故矛盾，从而得证

$$\sum_i \omega_i p_{ij}=\omega_j,\quad j\in H.$$

系 1 （a）平稳分布不存在的充要条件为 $H=\varnothing$；

（b）平稳分布唯一存在的充要条件为只有一个基本正常返闭集 C_α；

（c）平稳分布有无限多个的充要条件为至少有两个 C_α。

系 2 有限马氏链的平稳分布恒存在。

证明 当状态空间 E 为有限集时，由定理 1 系知 $H\neq\varnothing$。

例 1 设 $\{x_n\}$ 为艾伦费斯特链，转移概率为

$$p_{ii}=0,\ p_{i,i+1}=\frac{2N-i}{2N},\ p_{i,i-1}=\frac{i}{2N},$$

$$i=0,\ 1,\cdots,\ 2N.$$

求此链的平稳分布及各状态的平均回转时间。

解 由（14）得方程组

$$\pi_0=\frac{\pi_1}{2N},$$

$$\pi_k=\pi_{k-1}\frac{2N-k+1}{2N}+\pi_{k+1}\frac{k+1}{2N},\quad 1\leqslant k\leqslant 2N-1,$$

$$\pi_{2N}=\frac{\pi_{2N-1}}{2N}.$$

解此方程组，得

$$\pi_k=C_{2N}^k\pi_0.$$

由条件 $\sum_k\pi_k=1$ 得

$$1=\pi_0\sum_{k=0}^{2N}C_{2N}^k=2^{2N}\pi_0.$$

可见，艾伦费斯特链的平稳分布为

$$\pi_k=C_{2N}^k\cdot 2^{-2N},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2N.$$

因 $\{x_n\}$ 不可分，故由定理 6 及系 1（b）知，平稳分布 $\{\pi_k\}$ 唯一，且 $\pi_k=\frac{1}{\mu_k}$，所以，状态 k 的平均回转时间为

$$\mu_k=2^{2N}\cdot\frac{k!(2N-k)!}{(2N)!}.$$

例 2 设 $\{x_n\}$ 为生灭链，$p_{ii}=r_i$，$p_{i,i+1}=b_i>0$，$p_{i,i-1}=a_i>0$，$a_0=0$，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，$r_i+a_i+b_i=1$。令 $\beta_0=0$，

$$\beta_k=\frac{b_0b_1\cdots b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_k},\quad k\geqslant 1.$$

证明$\{x_n\}$为正常返链的充要条件为 $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k<\infty$。

证明 显然$\{x_n\}$不可分。故据系1，$\{x_n\}$正常返等价于$\{x_n\}$的平稳分布存在。由（14）得

$$\pi_0=\pi_0 r_0+\pi_1 a_1,$$
$$\pi_k=\pi_{k-1}b_{k-1}+\pi_k r_k+\pi_{k+1}a_{k+1}.$$

因为 $a_k+b_k+r_k=1$，故由上两式得

$$a_1\pi_1-b_0\pi_0=0,$$
$$a_{k+1}\pi_{k+1}-b_k\pi_k=a_k\pi_k-b_{k-1}\pi_{k-1},\quad k\geqslant 1.$$

于是，由归纳法可得递推公式

$$\pi_k=\frac{b_{k-1}\pi_{k-1}}{a_k},\quad k\geqslant 1,$$

所以

$$\pi_k=\frac{b_{k-1}}{a_k}\pi_{k-1}=\cdots=\frac{b_0\cdots b_{k-1}}{a_1\cdots a_k}\pi_0$$
$$=\beta_k\pi_0,\quad k\geqslant 0. \tag{22}$$

上式两边对k求和，得

$$1=\sum_k\pi_k=\pi_0\sum_k\beta_k. \tag{23}$$

从而，我们得

$$\pi_k=\frac{\beta_k}{\sum_k\beta_k},\quad k\geqslant 0.$$

可见，平稳分布$\{\pi_k\}$存在的充要条件为$\sum_k\beta_k<\infty$。

习 题

1. 证明不可分马氏链正常返的充要条件为其平稳分布存在。

2. 设对每一 i，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j$存在且与 i 无关，$\{\pi_j\}$是否为此链的平稳分布？

3. 设$\{x_n\}$的每一状态都是遍历的，问 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是否存在且与 i 无关？$\{x_n\}$的平稳分布是否存在？是否唯一？

4. 设$E=\{1,2,3\}$，

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

问 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是否存在？求此链的平稳分布。

5. 设$E=\{1,2,3,4,5\}$，

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

求此链的平稳分布。

6. 设马氏链的转移概率为

$p_{0,1}=1$，$p_{i,i-1}=p$，$\left(0<p<\frac{1}{2}\right)$，$p_{i,i-1}=q>0$，

$i\geqslant 1$，$p+q=1$。求此链的平稳分布。

7. 如存在 m 对一切 i，j，有 $p_{ij}^{(m)}>0$，证明

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$存在且与 i 无关；

(b) 如此链有限，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j>0$，且 $\sum\limits_j \pi_j=1$。

8. 设$\{x_n\}$不可分、常返。

(a) 证明在方程组

$$y_j=\sum_{i=0}^{\infty} y_i p_{ij}$$

的一组非负解中，如有一个大于零，则此组解全部大于零；

(b) 定义

$q_{ij}(n)=P_i(x_n=j,\ x_\nu\neq i,\ 1\leqslant\nu\leqslant n-1),\quad n\geqslant 1$。

令

$$q_{ij}^*=\sum_{n=1}^{\infty} q_{ij}(n)\ 。$$

试证对任一固定的 i，$\{q_{ij}^*\}$是(a)中的方程组的解。

9. 设 $E=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$转移概率为$p_{i,i+1}=p$，$p_{i,i-1}=q\ (p+q=1)$。问 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是否存在？

10. 设 i 非常返，又$\{x_n\}$的某一基本正常返闭集C有周期d，且C已分解为 $C=\bigcup\limits_{r=0}^{d-1} G_r$。证明定理2中的$f_{ij}(r)$对一切 j，$k\in G_r$，有 $f_{ij}(r)=f_{ik}(r)$。

11. 设$\{x_n\}$的正常返状态都是非周期的，试证

(a) 对一切 i，j，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_{ij}$；

(b) $\{\pi_{ij}\}$有下列性质：

(i) $\pi_{ij}\geqslant 0$，(ii) $\sum\limits_j \pi_{ij}\leqslant 1$，等号成立，如 $\pi_{jj}>0$，(iii) $\pi_{ij}=$

$$\sum_k \pi_{ik} p_{kj} = \sum_k p_{ik} \pi_{kj}.$$

*12. 假设同第11题。证明状态空间E可分解为互不相交的子集Q，I，J，K，…之和。使得

(a) 如$j \in Q$，则$\pi_{ij} = 0$ $(\pi_{ij} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)})$；

(b) 如$j \notin Q$，则$\pi_{jj} > 0$，$\sum_{j \in C} \pi_{jj} = 1$，其中$C$是$I$，$J$，$K$，…中之一。

(c) $\pi_{ij} = \delta_{IJ} \pi_{jj}$，$i \in I$，$j \in J$，其中

$$\delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & 如 I = J, \\ 0, & 如 I \cap J = \varnothing. \end{cases}$$

(读者比较：这里的π_{jj}与$\frac{1}{\mu_j}$有什么关系？这里的分解与§3.3的分解定理1有什么区别？)

13. 假设同第11题。将状态空间E按第12题分解为

$$E = Q \cup I \cup J \cup K \cup \cdots.$$

证明对每一状态$i \in Q$，存在非负数列$\lambda_i(I)$，$\lambda_i(J)$，$\lambda_i(K)$，…，使得

(a) $\sum_{C \in q} \lambda_i(C) \leqslant 1$，其中集族$q = \{I, J, K, \cdots\}$；

(b) $\pi_{ij} = \lambda_i(J) \pi_{jj}$，$i \in Q$，$j \in J$。

第四章　马尔科夫过程

第三章讲了参数离散的马氏链，这一章我们介绍时间及状态未必离散的马氏过程。Poisson 过程和 Wiener 过程是两类在理论及应用上都很重要的马氏过程，我们将在第五章系统地介绍。

马氏过程的定义有三种；一般的马氏过程，具有转移函数的马氏过程及标准马氏过程。在这一章里我们将分述这三种定义及其关系。最后一节是关于样本函数的连续性。

§4.1 关于σ代数的条件概率与条件期望

本节是预备性知识。

（一）定义

设已给概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)>0$ · 我们已知事件 $B\in\mathscr{F}$ 关于 A 的条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (1)$$

如 $P(A)=0$，就规定 $P(B|A)=0$。

对固定的 A，$P(A)>0$。$P(\cdot|A)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度。因此，随机变量 y 关于 A 的条件数学期望自然定义为

$$E(y|A)=\int_{\Omega} y(\omega)P(d\omega|A),$$

或等价地

$$E(y|A)=\frac{1}{P(A)}\int_{A} y(\omega)P(d\omega). \qquad (2)$$

如 $P(A)=0$，就规定对一切 y，$E(y|A)=0$。

特别当 y 是集 B 的示性函数时，(2) 就化为 (1)。故我们

只需考虑条件期望即可。

将$E(y|A)$的概念推广如下。考虑Ω的某一分割A_1，A_2，…，即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，$A_i\in\mathscr{F}$。为了从整体上考查$E(y|A_i)$，$i=1,2,\cdots$。定义随机变量$z(\omega)$，使它在$A_i$上的值为$E(y|A_i)$。即

$$z(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}E(y|A_i)I_{A_i}(\omega),\tag{3}$$

其中I_A为A的示性函数。于是，对$E|y|<\infty$的y，如$P(A_i)>0$，由（2），（3）知

$$\int_{A_i}y(\omega)P(d\omega)=P(A_i)E(y|A_i)$$

$$=\int_{A_i}z(\omega)P(d\omega),\tag{4}$$

如$P(A_i)=0$，上式两边都等于零，故（4）仍成立。易见，当我们取$\{A,A^c\}$，$P(A)>0$，为Ω的分割时，在（4）中以A代A_i即得（2）。

令$\mathscr{G}=\sigma(A_i,\ i=1,2,\cdots)$，即$\mathscr{G}$为含一切$A_i$，$i=1,2,\cdots$，的最小$\sigma$代数。由于$\mathscr{G}$中的元素（除了空集外）都是某些$A_i$的并集，故由（4）可知，对任一$B\in\mathscr{G}$，我们有

$$\int_B y(\omega)P(d\omega)=\int_B z(\omega)P(d\omega).\tag{5}$$

记$z=E(y|\mathscr{G})$，则$E(y|\mathscr{G})$具有性质：它是$\mathscr{G}$可测而且对一切$B\in\mathscr{G}$，（5）式成立。

上面是对特殊的σ代数$\mathscr{G}$而言。下面把它推广到一般的σ代数。受上面的启示，我们定义

定义1 设已给随机变量y，$E|y|<\infty$及$\mathscr{F}$的子σ代数$\mathscr{G}$。称随机变量$E(y|\mathscr{G})$为y**关于$\mathscr{G}$的条件数学期望**，如果它满足下列两条件

（a）$E(y|\mathscr{G})$ 为$\mathscr{G}$可测；

（b）对任一$B\in\mathscr{G}$，成立

$$\int_B E(y|\mathscr{G})\ P(d\omega)=\int_B yP(d\omega). \qquad (6)$$

定义 2　设$A\in\mathscr{F}$，称A的示性函数I_A关于$\mathscr{G}$的条件期望为A**关于**$\mathscr{G}$**的条件概率**，并记为$P(A|\mathscr{G})$。

换言之，$P(A|\mathscr{G})$为满足下列两条件的随机变量

（a）′ $P(A|\mathscr{G})$为$\mathscr{G}$可测；

（b）′ 对任一$B\in\mathscr{G}$，成立

$$\int_B P(A|\mathscr{G})P(d\omega)=P(AB). \qquad (7)$$

为使上述定义有意义，必须保证满足条件（a）和（b）的随机变量存在。为此考查集函数

$$\varphi(B)=\int_B y(\omega)P(d\omega),\ \ B\in\mathscr{G}.$$

易见$\varphi(B)$是$\mathscr{G}$上的广义测度，而且如$P(B)=0$，则$\varphi(B)=0$。故φ在$\mathscr{G}$上关于测度P绝对连续。因此，据Radon-Nikodym定理，在P-几乎处处相等的意义下，满足（a），（b）的随机变量$E(y|\mathscr{G})$唯一存在。注意，上述零测集属于$\mathscr{G}$。

往后当我们说y关于$\mathscr{G}$的条件期望（或A关于$\mathscr{G}$的条件概率）时，指的即是上述等价类中的某一个随机变量。故$E(y|\mathscr{G})$只是指它们中的一个代表。

下面举$E(y|\mathscr{G})$的例子，从中也可看出它与通常的条件期望的关系。

例 1　设$\mathscr{G}=\{\varnothing,\ \Omega\}$，则$E(y|\mathscr{G})=Ey$。

实际上，这时等于Ω以自己为其分割。由（3）即知，$E(y|\mathscr{G})=E(y|\Omega)=Ey$。

我们也可以据定义去证明。由于这时任一$\mathscr{G}$可测的随机变量必为常数c，如在（6）中取$B=\Omega$，即得$c=Ey$。

例 2 设 $\mathscr{G}=\{\varnothing, D, D^c, \Omega\}$，其中 $0<P(D)<1$。则

$$E(y|\mathscr{G})(\omega)=\begin{cases} E(y|D), & \text{如}\ \omega\in D, \\ E(y|D^c), & \text{如}\ \omega\notin D. \end{cases} \quad (8)$$

实际上，如以 $\{D, D^c\}$ 为 Ω 的分割，则 $\mathscr{G}=\sigma(D, D^c)$。由（3），（5）即得（8）。且由 $\mathscr{G}$ 的构造知（8）是唯一的。

下一个例子的结论，我们以后要经常用到。

例 3 如 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$ 或 y 为 $\mathscr{G}$ 可测，则

$$E(y|\mathscr{G})=y \quad \text{a.e.}. \quad (9)$$

特别，对任一 $B\in\mathscr{G}$，有

$$P(B|\mathscr{G})=I_B \quad \text{a.e.}. \quad (10)$$

例 4 设 X 与 Y 为连续型随机变量，又 Y 可积且 (X, Y) 有分布密度 $f(x, y)$，$x, y\in R_1$。如 $\mathscr{G}=\sigma(X)$，即包含一切 $(X\in\Gamma)$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$，的最小 σ 代数，则 $E(Y|\mathscr{G})$ 与概率论中所定义的 Y 关于 X 的条件期望是一致的。

实际上，回忆 Y 在 $X=z$ 条件下的条件密度函数，定义

$$f(y|z)=\frac{f(z, y)}{p(z)}, \quad p(z)>0, \quad (11)$$

其中 $p(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z, y)dy$。当 $p(z)=0$ 时，规定（11）左方值为 0。于是 Y 在 $X=z$ 条件下的条件期望为

$$E(Y|X=z)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y|z)dy. \quad (12)$$

由（11）知（12）右方为 z 的可测函数。因此得可测函数

$$g(z)=E(Y|X=z), \quad z\in R_1.$$

可见，Y 关于 X 的条件期望

$$E(Y|X)=g(X)$$

为 $\sigma(X)$ 可测。往下证明对任一 $B\in\sigma(X)$，有

$$\int_B g(X)P(d\omega)=\int_B YP(d\omega). \qquad (13)$$

设 $h(z)$ 为任意有界可测函数，$A=(z: p(z)>0)$。则

$$E(h(X)Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(z)yf(z, y)dzdy$$

$$=\int_A\left[\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(z, y)}{p(z)}dy\right]p(z)h(z)dz$$

$$=\int_A g(z)p(z)h(z)dz$$

$$=\int_\Omega g(X)h(X)P(d\omega).$$

如在上式中令 $h(z)=I_\Gamma(z)$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$。则得

$$\int_{(X\in\Gamma)} YP(d\omega)=\int_{(X\in\Gamma)} g(X)P(d\omega),$$

即为 (13)。可见 $g(X)=E(Y|\mathscr{G})$，a.e.。

（二）基本性质

读者注意，以下提到的随机变量 y，y_n 均设可积，而且不等式，等式及极限关系式都指对几乎所有的 ω 成立，不另再声明。

由于 $E(y|\mathscr{G})$ 是用可测性条件（a）及积分性质（b）来定义的，故可推想 $E(y|\mathscr{G})$ 会具有勒贝格积分的一些性质。

性质1 对任意实数 c，c_1 及 c_2，有

（i）$E(c|\mathscr{G})=c$；

(ii) **线性性：**

$$E(c_1y_1+c_2y_2|\mathscr{G})=c_1E(y_1|\mathscr{G})+c_2E(y_2|\mathscr{G}).$$

证明 （i）是例3的特殊情况。往下证 (ii)。由定义知 $\sum_{k=1}^{2} c_kE(y_k|\mathscr{G})$ 为 $\mathscr{G}$ 可测。其次，对任一 $B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B \left\{\sum_{k=1}^{2} c_k E(y_k|\mathscr{G})\right\} P(d\omega)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} c_k \int_B E(y_k|\mathscr{G}) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{2} c_k \int_B y_k P(d\omega)$$

$$= \int_B \left\{\sum_{k=1}^{2} c_k y_k\right\} P(d\omega),$$

故（ii）得证。

性质 2　非负性及单调性。

（i）如 $y \geqslant 0$，则 $E(y|\mathscr{G}) \geqslant 0$；

（ii）如 $y_1 \geqslant y_2$，则 $E(y_1|\mathscr{G}) \geqslant E(y_2|\mathscr{G})$。

证明　设 $y \geqslant 0$。令

$$B = (\omega : E(y|\mathscr{G})(\omega) < 0),$$

$$B_m = \left(\omega : E(y|\mathscr{G})(\omega) \leqslant -\frac{1}{m}\right), \quad m = 1, 2, \cdots.$$

易见 $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$，而且

$$-\frac{1}{m} P(B_m) \geqslant \int_{B_m} E(y|\mathscr{G}) P(d\omega)$$

$$= \int_{B_m} y P(d\omega) \geqslant 0.$$

可见 $P(B_m) = 0$，从而 $P(B) = 0$。故（i）成立。由（i）及性质 1 即可推得（ii）。

性质 3　$|E(y|\mathscr{G})| \leqslant E(|y| \,|\, \mathscr{G})$。

证明　因 $|y| \geqslant \pm y$，由性质 2 及性质 1

$$E(|y| \,|\, \mathscr{G}) \geqslant \pm E(y|\mathscr{G}),$$

故性质 3 成立。

性质 4　单调收敛定理

设 $0 \leqslant y_n \uparrow y\ (n \to \infty)$，$E|y| < \infty$，则 $E(y_n|\mathscr{G}) \uparrow$

$E(y|\mathscr{G})$ $(n\to\infty)$。

证明 由 $0\leqslant y_n\leqslant y_{n+1}\leqslant y$ 得 $0\leqslant E(y_1|\mathscr{G})\leqslant E(y_2|\mathscr{G})\leqslant\cdots\leqslant E(y|\mathscr{G})$。故对几乎所有的ω，$\lim\limits_{n\to\infty}E(y_n|\mathscr{G})$ 存在。在使极限不存在的ω上定义极限值为零。如此规定后，$\lim\limits_{n\to\infty}E(y_n|\mathscr{G})$ 为 $\mathscr{G}$ 可测。往下证它等于 $E(y|\mathscr{G})$。任取 $B\in\mathscr{G}$，据积分单调收敛定理，我们得

$$\int_B \lim_{n\to\infty}E(y_n|\mathscr{G})P(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_B E(y_n|\mathscr{G})P(d\omega)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_B y_nP(d\omega)=\int_B yP(d\omega),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}E(y_n|\mathscr{G})=E(y|\mathscr{G})$。

性质 5 控制收敛定理

设 $|y_n|\leqslant x$，$E|x|<\infty$。又 $y_n\to y$ $(n\to\infty)$，则

$$E(y_n|\mathscr{G})\to E(y|\mathscr{G}),\ (n\to\infty)。\tag{14}$$

证明 令

$$S_n=\sup_{k\geqslant n}y_k,\quad I_n=\inf_{k\geqslant n}y_k.$$

因 $|y_n|\leqslant x$，$S_n\downarrow y$，$I_n\uparrow y$ $(n\to\infty)$。故当 $n\to\infty$ 时

$$0\leqslant x-S_n\uparrow x-y,$$

$$0\leqslant x+I_n\uparrow x+y.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，由单调收敛定理知

$$E(x-S_n|\mathscr{G})\uparrow E(x-y|\mathscr{G}),$$

$$E(x+I_n|\mathscr{G})\uparrow E(x+y|\mathscr{G})。$$

从而当 $n\to\infty$ 时

$$E(S_n|\mathscr{G})\downarrow E(y|\mathscr{G}),\tag{15}$$

$$E(I_n|\mathscr{G})\uparrow E(y|\mathscr{G}).\tag{16}$$

其次，由 $I_n\leqslant y_n\leqslant S_n$ 及性质 2 知

$$E(I_n|\mathscr{G})\leqslant E(y_n|\mathscr{G})\leqslant E(S_n|\mathscr{G}).$$

在上不等式中令 $n\to\infty$，由（15），（16）得（14）。

性质 6 如随机变量 z 是 $\mathscr{G}$ 可测，且 $E|yz|<\infty$，则

$$E(yz|\mathscr{G})=zE(y|\mathscr{G}). \tag{17}$$

证明 令

$$\mathscr{L}=\{z: E|yz|<\infty\},$$

$$L=\{z: z\text{ 使（17）成立}\}.$$

由性质 1 及性质 4 易证 L 是 $\mathscr{L}$-系。其次，当 $z=I_A$，$A\in\mathscr{G}$ 时，z 是 $\mathscr{G}$ 可测，且对一切 $B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B zyP(d\omega)=\int_{AB}yP(d\omega)=\int_{AB}E(y|\mathscr{G})P(d\omega)$$

$$=\int_B zE(y|\mathscr{G})P(d\omega).$$

因此 $I_A\in L$。于是据 $\mathscr{L}$-系法（附录（一）定理 2）知，L 包含一切属于 $\mathscr{L}$ 中且关于 $\mathscr{G}$ 可测的函数 z。

性质 7 （i）**全数学期望公式：**

$$E[E(y|\mathscr{G})]=Ey;$$

（ii）**重条件期望公式：**

$$E[E(y|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2]=E(y|\mathscr{G}_1)=E[E(y|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1],$$ 其中 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$。

证明 （i）只需在（6）中令 $B=\Omega$ 即得；

（ii）因 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$，故 $E(y|\mathscr{G}_1)$ 为 $\mathscr{G}_2$ 可测，从而由例 3 的结论得第一个等式。为证第二个等式，只需注意，如 $B\in\mathscr{G}_1$，则 $B\in\mathscr{G}_2$。所以有

$$\int_B yP(d\omega)=\int_B E(y|\mathscr{G}_2)P(d\omega).$$

在以上基本性质中，如取 $y=I_A$，$A\in\mathscr{F}$，就可得到关于条件概率的相应性质。下面列举其中的几个。以下均设 A，$A_n\in\mathscr{F}$。

性质（a） $0\leqslant P(A|\mathscr{G})\leqslant 1$。

性质（b） 如$P(A)=0$，则$P(A|\mathscr{G})=0$； (18)

如$P(A)=1$，则$P(A|\mathscr{G})=1$。 (19)

性质（c） 如 $A_n\uparrow A$或$A_n\downarrow A$，则

$$P(A_n|\mathscr{G})\to P(A|\mathscr{G})\quad(n\to\infty)。$$

性质（d） 如$A_nA_m=\varnothing$ $(n\neq m)$，则

$$P\left(\bigcup_n A_n|\mathscr{G}\right)=\sum_n P(A_n|\mathscr{G})。$$

(a)—(d)的证明 由性质2及$0\leqslant I_A\leqslant 1$得（a）。由（7）式及性质（a）得（18）。如$P(A)=1$，则由（18）

$$\begin{aligned}0&=P(A^c|\mathscr{G})\\&=E(1-I_A|\mathscr{G})\\&=1-P(A|\mathscr{G}),\end{aligned}$$

得证（19）。

如 $A_n\uparrow A$，则$I_{A_n}\uparrow I_A$。由性质4即得（c）。

设 A_1，A_2，…，A_n 互不相交，则$I_{\bigcup_{k=1}^n A_k}=\sum_{k=1}^n I_{A_k}$。由性质1知（d）对有限的场合正确。再应用性质（c）即知对可列多个互不相交的 A_1，A_2，…，性质（d）也对。

关于条件期望的其它性质见习题7，8，9，11等。

习　题

1. 证明任一可积的随机变量y，可分解为

$$y=z+E(y|\mathscr{G}),$$

其中z满足$E(z\xi)=0$，ξ为任一有界$\mathscr{G}$可测的随机变量

2. 设$E|y|<\infty$，z有界，证明

$$E\{E(y|\mathscr{G})z\}=E\{yE(z|\mathscr{G})\}。$$

3. 证明

（i） 如$X=Y$ a. e.，则$E(X|\mathscr{G})=E(Y|\mathscr{G})$ a. e.，

(ii) 如$X^2=E(Y^2|\mathscr{G})$ a. e.，$E(Y|\mathscr{G})=X$ a. e.，则 $X=Y$ a. e.。

4. 设$E|y_n|<\infty$，$E|y|<\infty$。称y_n**弱收敛于**y，如对任一有界随机变量z，$\lim\limits_{n\to\infty} E(y_n z)=E(yz)$。试证如$y_n$弱收敛于$y$，则$E(y_n|\mathscr{G})$弱收敛于$E(y|\mathscr{G})$。

5. 设$E|y|<\infty$，$B\in\mathscr{G}$，$\mathscr{H}=\sigma(AB: A\in\mathscr{G})$。证明

$$E(yI_B|\mathscr{G})=E(yI_B|\mathscr{H})\quad \text{a. e.}.$$

6. 设$\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$及$\mathscr{H}$为$\mathscr{F}$的子σ代数。证明下列两条件等价：

(a) 对一切$A\in\mathscr{G}_1$，$B\in\mathscr{G}_2$，有

$$P(AB|\mathscr{H})=P(A|\mathscr{H})P(B|\mathscr{H})\quad \text{a. e.};$$

(b) 令$\mathscr{G}_1\vee\mathscr{H}$表示包含$\mathscr{G}_1\cup\mathscr{H}$的最小$\sigma$代数。则对一切$B\in\mathscr{G}_2$有

$$P(B|\mathscr{G}_1\vee\mathscr{H})=P(B|\mathscr{H})\quad \text{a. e.}.$$

我们称满足上述条件（a）或（b）的子σ代数$\mathscr{G}_1$和$\mathscr{G}_2$为**关于$\mathscr{H}$条件独立**。

7. **Cauchy-Schwarz不等式**。

证明如$E|X|^2<\infty$，$E|Y|^2<\infty$。则

$$\{E(|XY||\mathscr{G})\}^2\leqslant E(X^2|\mathscr{G})E(Y^2|\mathscr{G})\quad \text{a. e.}.$$

8. **Fatou引理**。

设$0\leqslant x_n\leqslant Z$，$E|Z|<\infty$。证明

$$E(\varliminf_{n\to\infty} x_n|\mathscr{G})\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(x_n|\mathscr{G})\quad \text{a. e.}.$$

9. 设x_n，Y，Z 均可积。试证

(i) 如$Y\leqslant x_n$ a. e.，且$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$可积，则

$$E(\varliminf_{n\to\infty} x_n|\mathscr{G})\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(x_n|\mathscr{G})\quad \text{a. e.};$$

(ii) 如$x_n\leqslant Z$ a. e.，且$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$可积，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} E(x_n|\mathscr{G})\leqslant E(\varlimsup_{n\to\infty} x_n|\mathscr{G})\quad \text{a. e.}.$$

10. 设$x_1, x_2, \cdots$相互独立且$E|x_n|<\infty$。证明

(i) $E(x_{n+1}|x_1, x_2, \cdots, x_n)=Ex_{n+1}$ a. e.；

(ii) 令 $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$，则对任意 $n\geqslant 1$，

$$E(y_{n+1}|y_1, y_2, \cdots, y_n) = y_n \quad \text{a. e.}$$

的充要条件为 $Ey_n = 0$，$n \geq 1$。其中记号 $E(\cdot|x_1, \cdots, x_n) = E(\cdot|\sigma(x_1, \cdots, x_n))$。

11. 设已给上升的子 σ 代数列 $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{F}$，及可积的随机变量 X。定义

$$y_n = E(X|\mathscr{G}_n), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明 $E(y_{n+1}|y_1, y_2, \cdots, y_n) = y_n \quad \text{a. e.} \ (n \geq 1)$。

12. 设 $\mathscr{A}$ 为某一有界可测函数类，$\mathscr{A}$ 具有性质：对任一开集 G，存在 $f_n \in \mathscr{A}$ 使 $f_n \uparrow I_G$。试证：如有两个随机变量 X 和 Y，其中 X 为 $\mathscr{G}$ 可测，且对任一 $f \in \mathscr{A}$ 有

$$E(f(Y)|\mathscr{G}) = f(X) \quad \text{a. e.},$$

则 $X = Y$ a. e.。

13. 记号 $\mathscr{A}$ 的定义同上题。证明如随机变量 X 和 Y 满足对任意 $f, g \in \mathscr{A}$ 成立

$$E\{f(X)g(X)\} = E\{f(Y)g(X)\},$$

则 $X = Y$ a. e.。

14. 试举一反例指出，由条件期望的定义，一般不能得到 $E(y|\mathscr{G}) = y$ a. e. 其中 $\mathscr{G} \neq \mathscr{F}$。

15. **条件分布**

设已给 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，子 σ 代数 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 及二元函数 $G(A, \omega)$，$A \in \mathscr{F}$，$\omega \in \Omega$。称 $G(A, \omega)$ 为**关于 $\mathscr{G}$ 的条件分布**，如它满足

(i) 对每一 ω，$G(\cdot, \omega)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度；

(ii) 对每一 A，存在 $B \in \mathscr{G}$，$P(B) = 0$，使

$$G(A, \omega) = P(A|\mathscr{G}), \quad \omega \notin B.$$

试证如 $G(A, \omega)$ 为关于 $\mathscr{G}$ 的条件分布，则对任一可积随机变量 y，存在 $B \in \mathscr{G}$，$P(B) = 0$，使得当 $\omega \notin B$ 时

$$E(y|\mathscr{G})(\omega) = \int_\Omega y(\omega')G(d\omega', \omega).$$

16. **Jensen 不等式.**

称函数 $g(z)$，$z \in R_1$ 为**凸函数**，如对任意 $x, z \in R_1$，成立

$$g\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[g(x) + g(z)].$$

试证如 $g(z)$ 为凸函数，且随机变量 ξ 可积，则

$$g[E(\xi|\mathscr{G})]\leqslant E[g(\xi)|\mathscr{G}] \quad \text{a.e.}.$$

提示 对每一 $\omega\in\Omega$，利用 ξ 先造 $\mathscr{B}_1$ 上的一概率测度 $F(\cdot,\omega)$ 如下：

令 Q 表示全体有理数，对 $r\in Q$ 定义

$$\hat{F}(r,\omega)=P(\xi\leqslant r|\mathscr{G})(\omega).$$

由条件概率的性质知，存在 B，$P(B)=0$，当 $\omega\notin B$ 时，作为 r 的函数 $\hat{F}(r,\omega)$ 单调不减、右连续，且 $\lim\limits_{r\to\infty} F(r,\omega)=1$。今对 $a\in R_1$，定义

$$\hat{F}(a,\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{r\downarrow a, r\in Q}\hat{F}(r,\omega), & \text{如 } \omega\notin B,\\ f(a), & \text{如 } \omega\in B,\end{cases}$$

其中 $f(a)$ 为与 ω 无关的任一固定的分布函数。于是对每一 ω 得分布函数 $\hat{F}(a,\omega)$，$a\in R_1$。从而可产生一概率测度 $F(A,\omega)$，$A\in\mathscr{B}_1$。令

$\mathscr{H}=\{A: A\in\mathscr{B}_1$ 且使 $F(A,\omega)$ 为 $\mathscr{G}$ 可测$\}$，

则 $\mathscr{H}$ 是 λ-系，且由 F 的定义知 $\mathscr{H}$ 含一切 $(-\infty,a]$，故 $\mathscr{H}=\mathscr{B}_1$。从而对任一 $A\in\mathscr{B}_1$，$F(A,\omega)$ 为 $\mathscr{G}$ 可测函数。

记

$$\mathscr{L}=\{g(z): g \text{ 为 } \mathscr{B}_1 \text{ 可测且 } E|g(\xi)|<\infty\};$$

$$L=\left\{g(z): g \text{ 使 } E[g(\xi)|\mathscr{G}]=\int_{-\infty}^{\infty}g(z)F(dz,\omega)\right\}.$$

则 L 为 $\mathscr{L}$-系且 L 包含一切集 $(-\infty,a]$ 的示性函数。因此 L 包含 $\mathscr{L}$ 中一切 $\mathscr{B}_1$ 可测函数。特别，取 $g(z)=z$，得

$$E(\xi|\mathscr{G})(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}zF(dz,\omega). \tag{*}$$

故证明 Jensen 不等式化为证明

$$g\left\{\int_{-\infty}^{\infty}zF(dz,\omega)\right\}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}g(z)F(dz,\omega).$$

由上式据凸函数理论中的 Jensen 不等式是成立的（读者比较 $E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}zF_\xi(dz)$ 与（*）式，自然称 $\hat{F}(a,\omega)$，$a\in R_1$，为 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件分布函数）。

§4.2 马尔科夫过程

如不特别说明，本章恒设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是完备概率空间，$T=[0,\infty)$，随机过程$\{x_t,\ t\in T\}$的状态空间（E，$\mathscr{B}$）=（R_1，$\mathscr{B}_1$）。

（一）马氏过程的定义

称$\mathscr{F}$的子σ代数族$\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$为**$\sigma$代数流**，如果$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$，$0\leqslant s\leqslant t$。特别称$\sigma$代数流$\{\mathscr{N}_t,\ t\geqslant 0\}$，其中$\mathscr{N}_t=\sigma(x_s,\ s\leqslant t)$，为随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$的**自然$\sigma$代数流**。

定义1 称随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$关于σ代数流$\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$**为适应的**（简称$\{x_t\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$**适应过程**），如果对每一$t\geqslant 0$，$x_t$是$\mathscr{F}_t$可测。

显然，$\{x_t\}$恒为$\{\mathscr{N}_t\}$适应过程。易知，如$\{x_t\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程，则$\mathscr{N}_t\subset\mathscr{F}_t$，$t\geqslant 0$。

定义2 称随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$关于σ代数流$\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$**为马尔科夫过程**（简称$\{x_t,\ \mathscr{F}_t\}$为马氏过程），如$\{x_t\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程，且对一切$0\leqslant s\leqslant t$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_t\in\Gamma\,|\,\mathscr{F}_s)=P(x_t\in\Gamma\,|\,x_s)\quad \text{a.e.,}\tag{1}$$

其中记号$P(\cdot\,|\,x_s)=P(\cdot\,|\,\sigma(x_s))$。

条件（1）称为**马尔科夫性**。其直观意义如下：如把x_t看成某一随机质点在时刻t所处的状态。那么，马氏性（1）表示根据质点在"过去"一段时间$[0,\ s]$所观测到的信息，去预测"将来"质点在时刻t（$t>s$）的运动情况与只根据质点在"现在"时刻s的知识所预测结果是一样的（读者回忆§3.1马氏性的意义）。

如$\{x_t,\ \mathscr{F}_t\}$是马氏过程，这时$\mathscr{N}_t\subset\mathscr{F}_t$，在（1）的两边取关于$\mathscr{N}_s$的条件期望，可知$\{x_t,\ \mathscr{N}_t\}$也是马氏过程。

往后当提到$\{x_t\}$是马氏过程而不指明其σ代数流时，指的就是马氏过程$\{x_t,\ \mathscr{N}_t\}$。

对马氏过程$\{x_t\}$，（1）化为对一切$0 \leqslant s \leqslant t$

$$P(x_t \in \Gamma | x_r, \quad r \leqslant s) = P(x_t \in \Gamma | x_s) \quad \text{a.e.}, \tag{2}$$

其中记号$P(\cdot | x_r, \quad r \leqslant s) = P(\cdot | \mathscr{N}_s)$。

定理1 $\{x_t, \quad t \geqslant 0\}$是马氏过程的充要条件为：对任意有限多个$0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$及$\Gamma \in \mathscr{B}$，有

$$P(x_{t_n} \in \Gamma | x_{t_1}, \quad \cdots, x_{t_{n-1}}) = P(x_{t_n} \in \Gamma | x_{t_{n-1}}) \text{ a.e.}. \tag{3}$$

证明 设$\{x_t\}$为马氏过程。在（2）中令$t = t_n$，$s = t_{n-1}$，并对（2）的两边取关于σ代数$\sigma(x_{t_1}, \quad \cdots, \quad x_{t_{n-1}})$的条件期望，由重条件期望公式即得（3）。

反之，设（3）成立。当$s = t$时，回忆§4.1例3知（2）的两边都几乎处处等于$I_{(x_t \in \Gamma)}$。今设$s < t$，显然$P(x_t \in \Gamma | x_s)$为$\mathscr{N}_s$可测。其次任取$B \in \mathscr{N}_s$，下证

$$\int_B P(x_t \in \Gamma | x_s) P(d\omega) = P(B, x_t \in \Gamma). \tag{4}$$

令

$$\Lambda = \{B : B \in \mathscr{F}, \quad B\text{使（4）成立}\},$$

则Λ是λ-系。当$r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} \leqslant s < t$，

$$B = (x_{r_1} \in \Gamma_1, \quad \cdots, \quad x_{r_{n-1}} \in \Gamma_{n-1}) \tag{5}$$

时，不妨假定$r_{n-1} = s$，则由（3）知（4）成立。可见Λ包含一切形如（5）的柱集。但全体这样的柱集构成一个产生$\mathscr{N}_s$的π-系，从而由λ-系法知$\Lambda \supset \mathscr{N}_s$，（4）得证。

特别，当参数是离散时，条件（3）式等价于对任意$n \geqslant 0$，有（见习题4）

$$P(x_{n+1} \in \Gamma | x_0, \quad x_1, \quad \cdots, \quad x_n) = P(x_{n+1} \in \Gamma | x_n) \quad \text{a.e.}. \tag{6}$$

下面举马氏过程的几个例子。

例1 马氏链$\{x_n, \quad n \geqslant 0\}$是马氏过程。

实际上，由上节条件概率性质（d），为证（6）式只需证对任$m > n$及状态i，有

$$P(x_m = i \mid x_0, x_1, \cdots, x_n) = P(x_m = i \mid x_n) \quad \text{a.e.}.$$

为此，应用λ-系法，只需证明对集

$$B = (x_0 = i_0, x_1 = i_1, \cdots, x_n = i_n), \quad P(B) > 0,$$

有
$$\int_B P(x_m = i \mid x_n) P(d\omega) = P(B, x_m = i) \qquad (7)$$

即可。由于 $P(x_m = i \mid x_n)$ 在集 B 上的值为 $P(x_m = i \mid x_n = i_n)$，故（7）化为

$$P(x_m = i \mid x_n = i_n) P(x_0 = i_0, \cdots, x_n = i_n) = P(x_0 = i_0, \cdots, x_n = i_n, x_m = i).$$

上式等价于

$$P(x_m = i \mid x_n = i_n) = P(x_m = i \mid x_0 = i_0, \cdots, x_n = i_n). \qquad (8)$$

但 $\{x_n\}$ 是马氏链，（8）自然成立。

例 2 设 $\{y_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，$x_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$，$n = 1, 2, \cdots$。则 $\{x_n\}$ 是马氏过程。

实际上，对任意 $A, B \in \mathscr{B}_1$，我们有

$$\begin{aligned} &P(x_{n-1} \in A, y_n \in B \mid y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) \\ &= P(x_{n-1} \in A, y_n \in B \mid x_{n-1}) \quad \text{a.e.}, \end{aligned} \qquad (9)$$

这是因为（9）的左方

$$\begin{aligned} &P(x_{n-1} \in A, y_n \in B \mid y_1, \cdots, y_{n-1}) \\ &= E[I_A(x_{n-1}) I_B(y_n) \mid y_1, \cdots, y_{n-1}] \\ &= I_A(x_{n-1}) E[I_B(y_n)] \quad \text{a.e.}. \end{aligned}$$

最后等式是因 $I_A(x_{n-1})$ 为 $\sigma(y_1, \cdots, y_{n-1})$ 可测及 $I_B(y_n)$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 独立。（见§4.1习题10）。同理（9）的右方

$$\begin{aligned} P(x_{n-1} \in A, y_n \in B \mid x_{n-1}) &= E[I_A(x_{n-1}) \cdot I_B(y_n) \mid x_{n-1}] \\ &= I_A(x_{n-1}) \cdot E[I_B(y_n)] \quad \text{a.e.}, \end{aligned}$$

于是由（9）应用λ-系法可知，对一切 $G \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1$，有

$$\begin{aligned} &P\{(x_{n-1}, y_n) \in G \mid y_1, \cdots, y_{n-1}\} \\ &= P\{(x_{n-1}, y_n) \in G \mid x_{n-1}\} \quad \text{a.e.}, \end{aligned} \qquad (10)$$

特别，如$\Gamma\in\mathscr{B}$，我们有

$$P(x_{n-1}+y_n\in\Gamma|y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})=P(x_{n-1}+y_n\in\Gamma|x_{n-1})$$
$$\text{a.e.}, \tag{11}$$

但是$x_{n-1}+y_n=x_n$，又$\sigma(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})=\sigma(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})$，所以由（11）得

$$P(x_n\in\Gamma|x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})=P(x_n\in\Gamma|x_{n-1})\quad \text{a.e.}.$$

由（6）知$\{x_n\}$为马氏过程。

例3　独立增量过程。

称$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为**独立增量过程**，如对任意$0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量$x_{t_0}$，$x_{t_1}-x_{t_0}$，$x_{t_2}-x_{t_1}$，$\cdots$，$x_{t_n}-x_{t_{n-1}}$相互独立。则$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为马氏过程。

实际上，对任意$0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$x_{t_n}=\sum_{k=1}^{n}(x_{t_k}-x_{t_{k-1}})+y_0=\sum_{k=0}^{n}y_k,$$

其中$y_0=x_{t_0}$，$y_k=x_{t_k}-x_{t_{k-1}}$，$k\geqslant 1$。由设$\{y_k\}$相互独立，故据例2知

$P(x_{t_n}\in\Gamma|x_{t_0},\ x_{t_1},\ \cdots,\ x_{t_{n-1}})=P(x_{t_n}\in\Gamma|x_{t_{n-1}})$ a.e.，由定理1知$\{x_t\}$为马氏过程。

例4　Poisson过程与Wiener过程。

称取非负整数值的随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为**Poisson过程**，如它满足

（i）$\{x_t\}$是独立增量过程；

（ii）对任$0\leqslant s\leqslant t$，x_t-x_s具有参数为$\lambda(t-s)$的普阿松分布，即

$$P(x_t-x_s=k)=\frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!}\exp\{-\lambda(t-s)\},$$
$$\lambda>0.$$

称实值随机过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为**Wiener过程**（或**布朗运动过程**），如它满足

（i） $\{x_t\}$ 为独立增量过程；

(ii) 对 $0 \leqslant s \leqslant t$， $x_t - x_s$ 的分布为 $N(0, \sigma\sqrt{t-s})$，其中 $\sigma > 0$。

由例 3 知上述两类重要的过程为马氏过程，而且我们还可知道初始为 0 的 Wiener 过程是正态过程。实际上，任取 x_{t_1}, x_{t_2}, $\cdots$, x_{t_n}，不妨设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，及不全为零的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} b_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}),$$

其中 $t_0 = 0$，$b_k = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$。由条件（i），(ii) 可知上式右方是正态随机变量 $N\left(0, \sigma\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2 (t_k - t_{k-1})}\right)$。因此，由§2.2 定理 1 知 $\{x_t\}$ 是正态过程。

（二）马氏性的等价形式

如同§3.1一样，马氏性（1）有几种不同的等价形式。下面定理中的等式均指几乎处处成立。

定理 2 设 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 为 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ 适应过程，则下列诸条件等价：对任意 $0 \leqslant s \leqslant t$

（a） $$P(x_t \in \Gamma | \mathscr{F}_s) = P(x_t \in \Gamma | x_s), \tag{12}$$

（b）对任意 $\mathscr{B}$ 可测函数 $f(y)$，$y \in E$，且 $E|f(x_t)| < \infty$，有

$$E[f(x_t) | \mathscr{F}_s] = E[f(x_t) | x_s], \tag{13}$$

（c）对任意 $\mathscr{N}^s$ 可测随机变量 η，$E|\eta| < \infty$，有

(3)⟺(14)

$$E(\eta | \mathscr{F}_s) = E(\eta | x_s), \tag{14}$$

其中 $\mathscr{N}^s = \sigma(x_u, u \geqslant s)$；

（d）对任一 $A \in \mathscr{N}^s$，$B \in \mathscr{F}_s$，有

$$P(AB | x_s) = P(A | x_s) P(B | x_s). \tag{15}$$

$\mathscr{N}^s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 关于 x_s 条件独立.

证明 证明思路如下：

$$(\mathrm{a})\to(\mathrm{c})\begin{array}{l}\nearrow(\mathrm{b})\to(\mathrm{a})\\ \searrow(\mathrm{d})\to(\mathrm{a})\end{array}$$

先证 (a)⇒(c)：分三步。

第一步：先证对任意 $0\leqslant s\leqslant t$，及 $\sigma(x_t)$ 可测的随机变量 η，$E|\eta|<\infty$，(14) 成立。

实际上，当 $s=t$ 时 (14) 两边都等于 η。今设 $s<t$。令

$$\mathscr{L}=\{\eta: E|\eta|<\infty\},$$

$$L=\{\eta:\eta \text{ 使 (14) 成立}\},$$

则 L 是 $\mathscr{L}$-系。由 (12) 知示性函数 $I_{(x_t\in\Gamma)}\in L$，又一切 $\{x_t\in\Gamma\}$，$\Gamma\in\mathscr{B}$ 构成 σ 代数 $\sigma(x_t)$。故由 $\mathscr{L}$-系法知 L 包含一切属于 $\mathscr{L}$ 而且 $\sigma(x_t)$ 可测的随机变量。

第二步：对任意 $s\leqslant u_1<u_2<\cdots<u_m$，$\Gamma_i\in\mathscr{B}$，证明

$$P(x_{u_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant m|\mathscr{F}_s)=P(x_{u_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant m|x_s)。\tag{16}$$

用归纳法证之。当 $m=1$ 时 (16) 化为 (12)。今设 (16) 对 $m-1$ 正确。令

$$A_1=(x_{u_1}\in\Gamma_1),\ A_2=(x_{u_i}\in\Gamma_i,\ 2\leqslant i\leqslant m),\ A=A_1A_2。$$

则由条件期望的性质 6 和 7 知

$$\begin{aligned}P(A|\mathscr{F}_s)&=E(I_{A_1}\cdot I_{A_2}|\mathscr{F}_s)\\&=E[E(I_{A_1}\cdot I_{A_2}|\mathscr{F}_{u_1})|\mathscr{F}_s]\\&=E[I_{A_1}E(I_{A_2}|\mathscr{F}_{u_1})|\mathscr{F}_s]。\end{aligned}\tag{17}$$

由归纳法假定 $E(I_{A_2}\mathscr{F}_{u_1})=E(I_{A_2}|x_{u_1})$，代入 (17) 得

$$P(A|\mathscr{F}_s)=E[I_{A_1}E(I_{A_2}|x_{u_1})|\mathscr{F}_s],\tag{18}$$

但 $I_{A_1}E(I_{A_2},x_{u_1})$ 为 $\sigma(x_{u_1})$ 可测，故据第一步所证及 (18)，我们得

$$P(A|\mathscr{F}_s)=E[I_{A_1}P(A_2|x_{u_1})|x_s].\tag{19}$$

另一方面，由重条件期望公式

$$\begin{aligned}P(A|x_s)&=E[E(I_A|\mathscr{F}_{u_1})|x_s]\\&=E[I_{A_1}E(I_{A_2}|\mathscr{F}_{u_1})|x_s]\\&=E[I_{A_1}P(A_2|x_{u_1})|x_s].\end{aligned}\tag{20}$$

比较（19）、（20）得证（16）。

第二步：证明条件（c）成立。为此令

$$\mathscr{S}=\{\eta:E|\eta|<\infty\},$$

$$L=\{\eta:\eta\text{使（14）成立}\}.$$

由（16）知 L 包含一切 I_A，$A=(x_{u_i}\in\Gamma_i,\ i=1,2,\cdots,m)$，$m\geqslant 1$，$u_i\geqslant s$，$\Gamma_i\in\mathscr{B}$。又一切这种形状的柱集 A 构成产生 σ 代数 $\mathscr{N}'$ 的 π-系。因此由 $\mathscr{L}$-系法知，L 包含一切 $\mathscr{S}$ 中 $\mathscr{N}'$ 可测的随机变量。

（c）⇒（b）：因为（b）是（c）的特殊情况。

（b）⇒（a）：只需在（13）中取 $f(y)=I_\Gamma(y)$ 即得。

（c）⇒（d）：在（14）中令 $\eta=I_A$，$A\in\mathscr{N}'$，得

$$P(A|\mathscr{F}_t)=P(A|x_t),\tag{21}$$

又因 $\mathscr{F}_t\vee\sigma(x_t)=\mathscr{F}_t$，故（21）可写成

$$P(A|\mathscr{F}_t\vee\sigma(x_t))=P(A|x_t).\tag{22}$$

由§4.1习题 6 知（22）等价于（15）。

（d）⇒（a）：如（15）成立，则（22）成立，从而（21）成立。在（21）中取 $A=(x_t\in\Gamma)\in\mathscr{N}'$ 即得（a）。定理证毕。

条件（d）的一般化见习题 5 的（f）′。下面的另一种等价形式是定理 1 的直接推论。

系 设 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ 适应过程，则定理 1 的条件（a）与下列诸条件等价。

（e）对任意 $A\in\mathscr{F}_t$，$B\in\mathscr{N}'$，$s\geqslant 0$，有

$$\int_A P(B|x_t)P(d\omega)=P(AB);\tag{23}$$

（f）对任一$\mathscr{F}_s$可测的ξ及$\mathscr{N}^t$可测的η，如$E|\eta|<\infty$，$E|\xi\eta|<\infty$，则

$$E\xi\eta=E[\xi E(\eta|x_s)]。\tag{24}$$

证明　（a）$\Longleftrightarrow$（e）：如（a）成立。由定理1在(14)中令$\eta=I_B$即得（23）。反之，只需在（23）中令$B=(x_t\in\Gamma)$即得（a）。

（a）$\Longleftrightarrow$（f）：设（a）成立。由定理1在（14）的两边乘上ξ，再取数学期望并注意§4.1性质6和7即得（24）。反之，如（f）成立，在（24）中令$\xi=I_A$，$A\in\mathscr{F}_s$，$\eta=I_{(x_t\in\Gamma)}$，$t\geqslant s$，即知（a）成立。

习　　题

1．设$x_0, x_1, x_2, \cdots$为相互独立的随机序列，证明$\{x_n\}$为马氏过程。

2．设已给随机过程$\{x_t, t\geqslant 0\}$。令

$$\mathscr{F}^{(t)}=\sigma(x_s, s\geqslant 0, s\neq t)。$$

试证$\{x_t\}$两两独立的充要条件为，对每一$t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_t\in\Gamma|\mathscr{F}^{(t)})=P(x_t\in\Gamma)\qquad \text{a. e.}。$$

提示　利用§4.1习题6，令其中$\mathscr{G}=\{\Phi, \Omega\}$，$\mathscr{G}_2=\sigma(x_t)$。

3．证明习题2等价于对任意$\sigma(x_t)$可测且可积的随机变量y，成立

$$E(y|\mathscr{F}^{(t)})=Ey\qquad \text{a. e.}。$$

4．设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为随机序列，状态空间为$(E, \mathscr{B})$。试证$\{x_n\}$是马氏过程的充要条件为：对任一$n\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_{n+1}\in\Gamma|x_0, x_1, \cdots, x_n)=P(x_{n+1}\in\Gamma|x_n)\ \text{a. e.}。$$

提示　设上式成立，只需证对任$k\geqslant 1$有

$$P(x_{n+k}\in\Gamma|x_0, \cdots, x_n)=P(x_{n+k}\in\Gamma|x_n)\ \text{a. e.}\tag{*}$$

由此易得对任意$0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_r<m$，有

$$P(x_m\in\Gamma|x_{n_1}, \cdots, x_{n_r})=P(x_m\in\Gamma|x_{n_r})\ \text{a. e.}。$$

用归纳法证明（*）式。因

$$\begin{aligned}P(x_{n+k}\in\Gamma|x_0, \cdots, x_n)&=E[E(I_\Gamma(x_{n+k})|x_0, \cdots, x_{n+k-1})|x_0, \cdots, x_n]\\&=E[E(I_\Gamma(x_{n+k})|x_{n+k-1})|x_0, \cdots, x_n]。\end{aligned}$$

已知当 $k=1$ 时（*）成立。今设（*）对 $k-1$ 成立，则由上式可推知

$$\begin{aligned}P(x_{n+k}\in\Gamma|x_0,\cdots,x_n)&=E[E(I_\Gamma(x_{n+k})|x_{n+k-1})|x_n]\\&=E[P(x_{n+k}\in\Gamma|x_{n+k-1})|x_n]\\&=E[P(x_{n+k}\in\Gamma|x_0,x_1,\cdots,x_{n+k-1})|x_n]\\&=P(x_{n+k}\in\Gamma|x_n)\ \text{a. e.}.\end{aligned}$$

5. 令 $\mathcal{N}_s^t=\sigma(x_u,\ s\leqslant u\leqslant t)$。证明 $\{x_t\}$ 是马氏过程的充要条件为下列任一条件成立：

（e）′ 对任意 $0\leqslant s<t\leqslant u$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_u\in\Gamma|\mathcal{N}_s^t)=P(x_u\in\Gamma|x_t)\ \text{a. e.};$$

（f）′ 对任意 $t\geqslant0$，如 ξ 为 $\mathcal{N}_t$ 可测，η 为 $\mathcal{N}^t$ 可测，且 $E|\xi|<\infty$，$E|\eta|<\infty$，$E|\xi\eta|<\infty$，则

$$E(\xi\eta|x_t)=E(\xi|x_t)E(\eta|x_t)\ \text{a. e.}.$$

6. 设 $\{x_t,\ t\geqslant0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant0\}$ 适应过程。证明 $\{x_t,\mathscr{F}_t\}$ 是马氏过程的充要条件为：对任 $t\geqslant0$ 及 $A\in\mathscr{F}_t$，有

$$P(A|\mathcal{N}^t)=P(A|x_t)\ \text{a. e.}.$$

7. 设 $\{x_t,\ t\geqslant0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant0\}$ 适应过程。$g(y)$，$y\in E$ 是 $\mathscr{B}$ 可测函数且 $E|g(x_t)|<\infty$，$t\geqslant0$。证明如果对上述每一 $g(y)$，存在 $\mathscr{B}$ 可测函数 $f(y)$，$y\in E$。当 $0\leqslant s<t$ 时，成立

$$E[g(x_t)|\mathscr{F}_s]=f(x_s)\ \text{a. e.},$$

则 $\{x_t,\mathscr{F}_t\}$ 为马氏过程。

8. 设 $\{x_t,\mathscr{F}_t,\ t\geqslant0\}$ 为马氏过程，又子 σ 代数 $\mathscr{H}$ 与每一 $\mathscr{F}_t$ 独立，亦即 $P(AB)=P(A)P(B)$，$A\in\mathscr{H}$，$B\in\mathscr{F}_t$。证明 $\{x_t,\mathscr{H}\vee\mathscr{F}_t\}$ 也是马氏过程。

9. 设 $\{x_t,\ t\geqslant0\}$ 为马氏过程。令 T' 为 $T=[0,\infty)$ 的反序集。试证 $\{x_t,\ t\in T'\}$ 仍是马氏过程，亦即证明对任意 $0\leqslant s\leqslant t<t_1<t_2<\cdots<t_n$，有

$$P(x_s\in\Gamma|x_t,x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=P(x_s\in\Gamma|x_t)\ \text{a. e.}.$$

（读者回忆 §3.1 习题）。

10. 设已给随机序列 $\{x_n,\ n\geqslant1\}$ 及 $\{y_n,\ n\geqslant1\}$，其状态空间为 $(E,\mathscr{B})$，且 y_k 与 $x_n(n<k)$ 独立。又设 $f(x,y)$ 为 $(E\times E,\ \mathscr{B}\times\mathscr{B})\longrightarrow$

$(E, \mathscr{B})$ 的变换. 且假定对一切 n, 有

$$x_{n+1} = f(x_n, y_{n+1}).$$

证明 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ 为马氏过程.

11. 设随机过程 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 的状态空间 E 为可列集. 证明 $\{x_t\}$ 为马氏过程的充要条件为: 对任意 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 $i_1, i_2 \cdots, i_n \in E$ 有

$$P(x_{t_n} = i_n | x_{t_1} = i_1, \cdots, x_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(x_{t_n} = i_n | x_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

(满足上述条件的随机过程 $\{x_t\}$ 称为**连续参数马氏链**).

§4.3 齐次马尔科夫过程

(一) 转移概率函数

定义1 称四元函数 $p(s, x; t, \Gamma)$, $s, t \in T, s \leqslant t$, $\Gamma \in \mathscr{B}$, $x \in E$ 为**正规转移概率函数**（简称**转移函数**), 如果它满足下列四个条件:

(i) 对固定的 s, x, t, $p(s, x; t, \Gamma)$ 关于 Γ 是 $\mathscr{B}$ 上的概率测度;

(ii) 对固定的 s, t, Γ, $p(s, x; t, \Gamma)$ 关于 x 是 $\mathscr{B}$ 可测函数;

(iii) 对任一 s, $p(s, x; s, \Gamma) = I_\Gamma(x)$;

(iv) Chapman-Колмогоров 方程成立, 即对任意 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$, 有

$$p(s, x; u, \Gamma) = \int_E p(s, x; t, d_y) p \cdot (t, y; u, \Gamma). \tag{1}$$

条件 (iii) 称为**正规性**条件.

定义 2 转移函数 $p(s, x; t, \Gamma)$ 称为**齐次**的, 如果固定 x 和 Γ 时, 其值只依赖于 $t-s$. 换言之, 存在三元函数 $p(t, x, \Gamma)$, 使

$$p(s, x; t, \Gamma) = p(t-s, x, \Gamma). \tag{2}$$

由条件 (i)—(iv) 知 $p(t, x, \Gamma)$ 满足

(a) 对固定的 t, x, $p(t, x, \Gamma)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的概率测度;

(b) 对固定的 t, Γ, $p(t, x, \Gamma)$ 关于 x 是 $\mathscr{B}$ 可测函数；

(c) $p(0, x, \Gamma)=I_{\Gamma}(x)$；

(d) 对任意 s, $t \geqslant 0$,

$$p(s+t, x, \Gamma)=\int_E p(s, x, dy) p(t, y, \Gamma). \tag{3}$$

往后，我们称齐次转移函数即指满足上述条件(a)—(d)的 $p(t, x, \Gamma)$.

转移函数 $p(s, x; t, \Gamma)$ 可直观地理解为一随机质点在时刻 s 处于状态 x 的条件下，于时刻 t 转移到 Γ 中的状态的概率。C-K 方程 (1) 表示，这转移概率等于在时刻 s 质点由 x 出发，于中间时刻 t 先转到 E 中任一状态 y，然后再于时刻 t 由 y 出发，直到时刻 u 转移到 Γ 中的概率。

在齐次的场合，如对定义在 E 上的有界 $\mathscr{B}$ 可测函数 $f(y)$，定义算子

$$T_t f(x)=\int_E f(y) p(t, x, dy), \tag{4}$$

则由条件 (b) 及附录(一)定理 4 可知，对每一 $t \geqslant 0$, $T_t f(x)$ 也是定义在 E 上的有界 $\mathscr{B}$ 可测函数。因此，由 $p(t, x, \Gamma)$ 可产生一族算子 $\{T_t, t \geqslant 0\}$. 而且由 (3) 易证

$$T_{s+t}=T_s T_t,$$

即 $\{T_t, t \geqslant 0\}$ 成一半群。借助于泛函分析的半群理论，我们可通过 $\{T_t\}$ 研究马氏过程的转移函数。想知道这方面的理论的读者，可参阅〔1〕§4.3—§4.4.

称 $p(t, x, \Gamma)$ 为Feller转移函数，如对每一 $t \geqslant 0$ 及任一有界连续函数 $f(y)$, $T_t f(y)$ 也是连续函数。下面举几个与马氏过程有关的齐次转移函数。

例1 (马氏链转移函数)

设 $T=E=\{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathscr{B}$ 为 E 的一切子集所成的 σ-代

数，(p_{ij})，$i, j \in E$，为一齐次马氏链的转移矩阵。对$n \geq 0$，$i \in E$及$\Gamma \in \mathscr{B}$，定义

$$p(n, i, \Gamma) = \sum_{j \in \Gamma} p_{ij}^{(n)}, \tag{5}$$

则$p(n, i, \Gamma)$为齐次转移函数且是Feller的（在离散拓扑下）。

实际上，$p(n, i, \Gamma)$满足（a）—（c）是明显的。其次由（5）知

$$\begin{aligned} p(m+n, i, \Gamma) &= \sum_{j \in \Gamma} p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{j \in \Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} \cdot \sum_{j \in \Gamma} p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(m, i, k) p(n, k, \Gamma). \end{aligned}$$

此即（3）式。

例 2（Wiener转移函数）

设$T = [0, \infty), (E, \mathscr{B}) = (R_1, \mathscr{B}_1)$。对$t > 0$，$x, y \in E$，令

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}\right\}, \tag{6}$$

其中$\sigma > 0$为常数。对$\Gamma \in \mathscr{B}$定义

$$p(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \int_\Gamma p(t, x, y) dy, & t > 0, \\ I_\Gamma(x), & t = 0, \end{cases} \tag{7}$$

则$p(t, x, \Gamma)$为齐次转移函数，称它为**Wiener转移函数**。易见$p(t, x, \Gamma)$也是Feller转移函数。

实际上，条件（a）（c）显然满足。下证C-K方程成立。对任意$s, t > 0$及$\Gamma \in \mathscr{B}$，令ξ_1和ξ_2为定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上相互独立的正态随机变量，分别具有分布$\mathscr{N}(x, \sigma\sqrt{s})$

和 $\mathscr{N}(0, \sigma\sqrt{t})$。于是 $\xi=\xi_1+\xi_2$ 的分布为 $\mathscr{N}(x, \sigma\sqrt{s+t})$。所以

$$p(s+t, x, \Gamma)=P(\xi\in\Gamma)=P(\xi_1+\xi_2\in\Gamma)$$
$$=\int_\Gamma dz\int_E p(s, x, y)p(t, 0, z-y)dy$$
$$=\int_E\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int_\Gamma e^{\frac{-(z-y)^2}{2\sigma^2 t}}dz\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}}$$
$$\cdot e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2 s}}dy=\int_E p(t, y, \Gamma)p(s, x, dy).$$

注 Wiener转移函数不仅对时间是齐次的，对空间它也是齐次的。下例的Poisson转移函数也如此（见习题 6）。

例 3 （Poisson转移函数）

设 $T=[0, \infty)$，$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathscr{B}$ 为 E 的一切子集所成的 σ 代数。对 $i, j\in E$，令

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & \text{如 } t>0,\ j\geqslant i,\\ 0, & \text{如 } j<i,\\ \delta_{ij}, & \text{如 } t=0;\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数。对 $\Gamma\in\mathscr{B}$，定义

$$p(t, i, \Gamma)=\sum_{j\in\Gamma}p_{ij}(t),\quad t\geqslant 0.$$

则 $p(t, i, \Gamma)$ 为齐次转移函数，称它为**Poisson转移函数**。在离散拓扑意义下，$p(t, i, \Gamma)$ 是Feller转移函数。其证法与例 2 相同，留作习题。

（二）齐次马尔科夫过程

条件概率 $P(x_t\in\Gamma|x_s)$ 依赖于 s, x_s，t 及 Γ。一类重要的马氏过程是当存在转移函数 $p(s, x; t, \Gamma)$，且对任意 $0\leqslant s\leqslant t$ 及 $\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_t\in\Gamma|x_s)=p(s,x_s;t,\Gamma)\quad \text{a}\cdot\text{e}\cdot \tag{8}$$

定义 3 称马氏过程$\{x_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$为**具有转移函数的**，如存在转移函数$p(s,x;t,\Gamma)$使（8）式成立。

有时也称$\{x_t,\mathscr{F}_t\}$是以$p(s,x;t,\Gamma)$为转移函数，或称$\{x_t,\mathscr{F}_t\}$为由$p(s,x;t,\Gamma)$产生的马氏过程。

定义 4 具有转移函数的马氏过程称为**齐次马尔科夫过程**，如其转移函数是齐次的。

在齐次的场合，（8）化为对任意$s,t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$。

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|x_s)=p(t,x_s,\Gamma)\quad \text{a}\cdot\text{e}\cdot. \tag{9}$$

称齐次马氏过程为**Feller过程**，如其转移函数为Feller转移函数。

设$\{x_t\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程，由定义可知$\{x_t,\mathscr{F}_t\}$是齐次马氏过程的充要条件为存在$p(t,x,\Gamma)$，使对任意$s,t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{F}_s)=p(t,x_s,\Gamma)\quad \text{a}\cdot\text{e}\cdot. \tag{10}$$

这只需对（10）的两边取$E(\cdot|x_s)$即得（9），从而

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{F}_s)=P(x_{s+t}\in\Gamma|x_s)\quad \text{a}\cdot\text{e}\cdot,$$

故$\{x_t,\mathscr{F}_t\}$是马氏过程。由此可见，(10)隐含着马氏性和齐次性。

例1 齐次马氏链．设$\{x_n,n\geqslant 0\}$为齐次马氏链，则$\{x_n\}$为齐次马氏过程，其转移函数为上段例1定义的$p(n,i,\Gamma)$。

实际上，当$h=0$时，

$$P(x_{n+h}\in\Gamma|x_n)=p(h,x_n,\Gamma). \tag{11}$$

因上式两边都等于$I_\Gamma(x_n)$。如$h>0$，则在ω集$(x_n=i)$上，

$$P(x_{n+h}\in\Gamma|x_n)=P(x_{n+h}\in\Gamma|x_n=i)$$

$$=\sum_{j\in\Gamma}p_{ij}^{(h)}=p(h,i,\Gamma).$$

故（11）也成立。

例 2 初始为0的Wiener过程$\{x_t,t\geqslant 0\}$为齐次马氏过程，

其转移函数是上段例2定义的Wiener转移函数。

实际上，§4.2例4已指出$\{x_t\}$是正态马氏过程。其次，如$t=0$，则（9）的两边都等于$I_\Gamma(x_s)$。如$t>0$而$s=0$，因$x_0=0$，故（9）的两边都等于$P(x_t\in\Gamma)$。今设$t>0$，$s>0$，要证对任一$B\in\mathscr{B}_1$，成立

$$\int_{(x_s\in B)} p(t, x_s, \Gamma)P(d\omega)=P(x_{s+t}\in\Gamma, x_s\in B). \quad (12)$$

由定义x_s的分布为$\mathscr{N}(0, \sigma\sqrt{s})$。为简便计，令$\sigma=1$。因为$\{x_t\}$是正态过程，故$(x_s, x_{s+t})$为正态向量。于是（12）的右方

$$P(x_s\in B, x_{s+t}\in\Gamma)=\int_B\int_\Gamma f(x, y)dydx, \quad (13)$$

其中
$$f(x, y)=(2\pi\sqrt{su(1-r^2)})^{-1}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{s}-2r\frac{xy}{\sqrt{su}}+\frac{y^2}{u}\right]\right\}, \quad (14)$$

$$u=s+t, \quad r=\frac{Ex_sx_u}{\sqrt{su}}=\frac{s}{\sqrt{su}}=\sqrt{\frac{s}{u}}.$$

将r的值代入（14）的右方得

$$f(x, y)=(2\pi\sqrt{st})^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s}+\frac{(y-x)^2}{t}\right)\right\} \quad (15)$$

另一方面，由（7）可知（12）左方等于

$$\int_B p(t, x, \Gamma)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{x^2}{2s}}dx$$
$$=\int_B\left[\int_\Gamma\frac{1}{2\pi\sqrt{ts}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy\right]e^{-\frac{x^2}{2s}}dx$$
$$=\int_B\int_\Gamma\frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s}+\frac{(y-x)^2}{t}\right)\right\}dydx$$
$$=\int_B\int_\Gamma f(x, y)dydx. \quad (16)$$

由（13），（16）得证（12）。

例 3 初始为 0 的Poisson过程为具有Poisson转移函数的齐次马氏过程（习题 4 ）。

往后我们只讨论齐次马氏过程．而且如我们在 § 4.2 所规定的，其状态空间 $(E,\mathscr{B})=(\boldsymbol{R}_1,\mathscr{B}_1)$。

下面的定理指出，齐次马氏过程的有限维联合分布，完全由其转移函数及初始分布所决定。这与 § 3.1引理 2 是一样的。

定理 1 设 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 为随机过程，则 $\{x_t\}$ 是齐次马氏过程的充要条件为：存在 $p(t,x,\Gamma)$ 对任意 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 及 $\Gamma_i\in\mathscr{B}$，$1\leqslant i\leqslant n$，有

$$
\begin{aligned}
&P(x_{t_1}\in\Gamma_1,x_{t_2}\in\Gamma_2,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)\\
=&\int_E\mu(dy_0)\int_{\Gamma_1}p(t_1,y_0,dy_1)\int_{\Gamma_2}p(t_2-t_1,\ y_1,dy_2)\\
&\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中 $\mu(\Gamma)=P(x_0\in\Gamma)$。

证明 必要性：设 $\{x_t\}$ 是以 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数的齐次马氏过程．对任意 $s,t\geqslant 0$，由（10）

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{N}_s)=p(t,x_s,\Gamma)\quad \text{a.e.},$$

或等价地对任意 $A\in\mathscr{N}_s$，有

$$P(A,x_{s+t}\in\Gamma)=\int_A p(t,x_s,\Gamma)P(d\omega). \tag{18}$$

在（18）中如令 $s=t_1$，$s+t=t_2$，$A=(x_{t_1}\in\Gamma_1)$，则得

$$P(x_{t_1}\in\Gamma_1,x_{t_2}\in\Gamma)=\int_{\Gamma_1}p(t_2-t_1,y_1,\Gamma)P_{t_1}(dy_1), \tag{19}$$

其中 $P_{t_1}(B)=P(x_{t_1}\in B)$。但在(18)中如取 $A=(x_0\in E)$，$s=0$，即知

$$P(x_t\in B)=\int_E p(t,y_0,B)\mu(dy_0),$$

故由（19）及附录（一）定理6，得

$$P(x_{t_1}\in\Gamma_1, x_{t_2}\in\Gamma)$$

$$=\int_{\Gamma_1} p(t_2-t_1, y_1, \Gamma)\int_E p(t_1, \quad y_0, dy_1)\mu(dy_0)$$

$$=\int_E \mu(dy_0)\int_{\Gamma_1} p(t_1, y_0, dy_1)\cdot p(t_2-t_1, y_1, \Gamma).$$

可见，当 $n=1$ 时（17）成立。用归纳法设(17)对 $n-1$ 成立。在（18）中令

$s=t_{n-1}$， $s+t=t_n$， $A=(x_{t_1}\in\Gamma_1, \cdots, x_{t_{n-1}}\in\Gamma_{n-1})$， $\Gamma=\Gamma_n$。我们得

$$P(x_{t_1}\in\Gamma_1, \cdots, x_{t_n}\in\Gamma_n)=\int_A p(t_n-t_{n-1}, x_{t_{n-1}}, \Gamma_n)P(d\omega)$$

$$=\int_{\Gamma_{n-1}} p(t_n-t_{n-1}, y_{n-1}, \Gamma_n)\widetilde{P}_{t_{n-1}}(dy_{n-1}), \tag{20}$$

其中 $\widetilde{P}_{t_{n-1}}(B)=P(x_{t_1}\in\Gamma_1, \cdots, x_{t_{n-2}}\in\Gamma_{n-2}, x_{t_{n-1}}\in B)$。由归纳法假定，我们有

$$\widetilde{P}_{t_{n-1}}(B)=\int_E \mu(dy_0)\int_{\Gamma_1} p(t_1, y_0, dy_1)\cdots$$

$$\int_B p(t_{n-1}-t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}).$$

将上式代入（20）并反复应用附录（一）定理 6 改变积分次序，即知（17）对 n 也成立。

充分性：分两步证之。先证对任意 s，$t\geqslant 0$ 及 $\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|x_s)=p(t, x_s, \Gamma)\quad \text{a.e.}. \tag{21}$$

实际上，如 $t=0$，（21）两边都等于 $I_\Gamma(x_s)$。如 $t>0$，对任意 $B\in\mathscr{B}$，由（17）及附录（一）定理 6

$$P(x_s\in B, x_{s+t}\in\Gamma)=\int_E \mu(dy_0)\int_B p(s, y_0, dy_1)$$

$$\cdot p(t, y_1, \Gamma)=\int_B p(t, y_1, \Gamma)P_s(dy_1)$$

$$=\int_{(x_s\in B)} p(t, x_s, \Gamma)P(d\omega). \tag{22}$$

可见（21）成立。其中$P_t(\Gamma)=P(x_t\in\Gamma)$。往下证$\{x_t\}$是马氏过程，即对$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，证明

$$P(x_{t_n}\in\Gamma|x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})=P(x_{t_n}\in\Gamma|x_{t_{n-1}})\quad \text{a.e.}$$

或等价地对任$A\in\sigma(x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})$，证明

$$P(A,x_{t_n}\in\Gamma)=\int_A P(x_{t_n}\in\Gamma|x_{t_{n-1}})P(d\omega),$$

由（21）等价地证明

$$P(A,x_{t_n}\in\Gamma)=\int_A p(t_n-t_{n-1},x_{t_{n-1}},\Gamma)P(d\omega). \tag{23}$$

为此令

$$\Lambda=\{A;\ A\text{使（23）成立}\},$$

$$\Pi=\{A;\ A=(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_{n-1}}\in\Gamma_{n-1}),\Gamma_i\in\mathscr{B}\}.$$

易见Λ是λ-系，Π是π-系，且由Π产生的最小σ代数即是$\sigma(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_{n-1}})$。因此，应用$\lambda$-系法，只需证明$\Pi\subset\Lambda$即可。为此，任取

$$A=(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_{n-1}}\in\Gamma_{n-1})\in\Pi,$$

则（23）的右方为

$$\int_A p(t_n-t_{n-1},x_{t_{n-1}},\Gamma)P(d\omega)$$

$$=\int_{\Gamma_{n-1}} p(t_n-t_{n-1},\ y_{n-1},\ \Gamma)\widetilde{P}(dy_{n-1}), \tag{24}$$

其中$\widetilde{P}(B)=P(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_{n-2}}\in\Gamma_{n-2},x_{t_{n-1}}\in B)$。为简便计，令$s_k=t_k-t_{k-1},t_0=0$。由（17）知

$$\widetilde{P}(B)=\int_E \mu(dy_0)\int_{\Gamma_1} p(s_1,y_0,dy_1)\cdots$$

$$\int_{\Gamma_{n-2}} p(s_{n-2},y_{n-3},dy_{n-2})\,p(s_{n-1},y_{n-2},B). \tag{25}$$

记
$$\nu(D)=\int_E \mu(dy_0)\int_{\Gamma_1} p(s_1,y_0,dy_1)\cdots$$

$$\int_{\Gamma_{n-3}} p(s_{n-3},y_{n-4},dy_{n-3})\,p(s_{n-2},y_{n-3},D), \tag{26}$$

于是，根据附录（一）定理6，(25) 可写成

$$\widetilde{P}(B)=\int_{\Gamma_{n-2}} p(s_{n-1}, y_{n-2}, B)\nu(dy_{n-2}). \tag{27}$$

将 (27) 代入 (24) 的右方，仍用附录（一）定理6，得

$$\int_A p(t_n-t_{n-1}, x_{t_{n-1}}, \Gamma)P(d\omega)$$

$$=\int_{\Gamma_{n-1}} p(s_n, y_{n-1}, \Gamma)\int_{\Gamma_{n-2}} p(s_{n-1}, y_{n-2}, dy_{n-1})\nu(dy_{n-2})$$

$$=\int_{\Gamma_{n-2}} \nu(dy_{n-2})\int_{\Gamma_{n-1}} p(s_{n-1}, y_{n-2}, dy_{n-1})p(s_n, y_{n-1}, \Gamma), \tag{28}$$

将 (26) 代入上式的右方，仍用上述定理得

$$\int_A p(t_n-t_{n-1}, x_{t_{n-1}}, \Gamma)P(d\omega)$$

$$=\int_E \mu(dy_0)\int_{\Gamma_1} p(s_1, y_0, dy_1)\cdots$$

$$\int_{\Gamma_{n-1}} p(s_{n-1}, y_{n-2}, dy_{n-1})p(s_n, y_{n-1}, \Gamma)$$

$$=P(x_{t_1}\in\Gamma_1, \cdots, x_{t_n}\in\Gamma)=P(A, x_{t_n}\in\Gamma).$$

可见A使 (23) 成立，故$A\in\Lambda$。定理证毕。

由此可见，如两个齐次马氏过程具有相同的转移函数及初始分布（它们所在的概率空间可以不同），那么，它们的有限维联合分布就相同。检查定理1必要性的证明可知，(17) 式对一般的齐次马氏过程$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$仍成立。

往下自然要问，如在$(R_1, \mathscr{B}_1)$上给定一概率测度μ及齐次转移函数$p(t, x, \Gamma)$。是否存在马氏过程，使它以$p(t, x, \Gamma)$为转移函数，以μ为初始分布？答案是肯定的。定理1中的 (17) 式启示我们如何构造所求过程的有限维联合分布。

定理 2 （存在性定理）

设已给$T=[0, \infty)$，齐次转移函数$p(t, x, \Gamma)$，$t\in T$，$x\in R_1$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$及概率测度$\mu(\Gamma)$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$。则存在概率空间

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义在其上的齐次马氏过程$\{x_t, t \in T\}$，使它的转移函数为$p(t, x, \Gamma)$，初始分布为μ。

证明 令

$$\Omega = R^T = \{\lambda(\cdot): \lambda(t), \quad t \in T \text{为实值函数}\},$$

$$\mathscr{F} = \mathscr{B}^T = \text{包含一切形如}$$

$$B_n = (\lambda(\cdot): \lambda(t_1) \in \Gamma_1, \cdots, \lambda(t_n) \in \Gamma_n)$$

的有限维柱集的最小σ代数，其中$n \geqslant 1$，$0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$，$\Gamma_i \in \mathscr{B}$。

对每一$\omega \in \Omega$，定义

$$x_t(\omega) = \lambda(t), \quad t \in T, \text{如} \omega = \lambda(\cdot)。 \tag{28}$$

对柱集B_n定义

$$P(B_n) = P_{t_1, \cdots, t_n}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$$

$$= \int_{R_1} \mu(dy_0) \int_{\Gamma_1} p(t_1, y_0, dy_1) \cdots \int_{\Gamma_n} p(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)。 \tag{29}$$

由转移函数的性质，易见$\{P_{t_1, \cdots, t_n}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)\}$满足相容性条件，于是由测度论的Колмогоров扩展定理知，在$\mathscr{F} = \mathscr{B}^T$上存在唯一的概率测度$P$，使它在$B_n$上的值与$P_{t_1, \cdots, t_n}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$重合。故如上造出的$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及$\{x_t\}$满足条件

$$P(x_{t_1} \in \Gamma_1, \cdots, x_{t_n} \in \Gamma_n) = P(B_n)。 \tag{30}$$

由定理1知$\{x_t\}$为齐次马氏过程，其转移函数为$p(t, x, \Gamma)$，初始分布为$\mu(\Gamma)$。

（三）标准齐次马尔科夫过程

设已给$p(t, x, \Gamma)$。令可测空间$(\Omega, \mathscr{N}) = (R^T, \mathscr{B}^T)$，$T = [0, \infty)$，$\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$。由(28)定义，$(E, \mathscr{B}) = (R_1, \mathscr{B}_1)$。注意$\mathscr{N} = \sigma(x_t, t \geqslant 0)$。由定理2的证明知，给定任一概率测度$\mu(\Gamma)$，$\Gamma \in \mathscr{B}$。可按(29)在$\mathscr{N}$上决定一概率测度$P$，使$\{x_t\}$是以$p(t, x, \Gamma)$为转移函数的齐次马氏过程，且

$P(x_0\in\Gamma)=\mu(\Gamma)$。注意 P 与 μ 有关，而 $\{x_t\}$ 的构造与 μ 无关。因此，如另取 $\mu=\mu_x$，这里 μ_x 表示质量集中在 x 点的概率测度，亦即 $\mu_x(\{x\})=1$，则在 $\mathscr{N}$ 上除了 P 以外，我们还可定义另一概率测度 P_x，使 $\{x_t\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{N},P_x)$ 上以 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数且 $P_x(x_0=x)=1$ 的齐次马氏过程。换言之，相对于测度 P_x，$\{x_t\}$ 是自状态 x 出发的齐次马氏过程。

让 x 取遍 E 中的点，在 $\mathscr{N}$ 上即得一族概率测度 $\{P_x,\ x\in E\}$。对每一 x，$\{x_t\}$ 在 $(\Omega,\mathscr{N},P_x)$ 上是以 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数的齐次马氏过程。因此，$\{x_t\}$ 除了满足马氏性

$$P(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{N}_s)=p(t,x_s,\Gamma)\quad \text{a.e.}\ P \tag{31}$$

外，它还满足对测度 P_x 的马氏性，即

$$P_x(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{N}_s)=p(t,x_s,\Gamma)\quad \text{a.e.}\ P_x \tag{32}$$

其次，对任意 $t\geqslant 0$，由（29），（30）知

$$P_x(x_t\in\Gamma)=p(t,x,\Gamma). \tag{33}$$

从而由（32）得

$$P_x(x_{s+t}\in\Gamma|\mathscr{N}_s)=P_{x_s}(x_t\in\Gamma)\quad \text{a.e.}\ P_x \tag{34}$$

对于需要考虑可在任意时刻从任意状态出发的质点的随机运动（即初始分布不固定的随机运动），用测度 P_x 去处理马氏性比用测度 P 方便。这与第三章讨论齐次马氏链时，我们用测度 P_i 比用测度 P 方便一样。

定义 5 称以 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数的齐次马氏过程 $\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 为标准的，如果在 $\mathscr{N}$ 上存在概率测度族 $\{P_y,\ y\in E\}$，使对每一 y，$\{x_t\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{N},P_y)$ 上以 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数的齐次马氏过程。

根据定理 2，齐次马氏过程成为标准的充要条件为如下定义的集函数 P_x：

$$P_x(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)=\int_{\Gamma_1}p(t_1,x,dy_1)\int_{\Gamma_2}p(t_2-t_1,y_1,dy_2)\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n). \tag{35}$$

可唯一地扩张成$\mathscr{N}$上的概率测度，其中 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$。上面我们已指出，在 $(R^T,\mathscr{B}^T,P)$ 上用（28）式造出的马氏过程$\{x_t\}$是标准的。对标准马氏过程而言，重要的是测度P_x，而非原来的测度P。因此，有的书上直接用P_x来定义标准齐次马氏过程（即满足（34）），而不引进P。

记

$$E_x\eta=\int_\Omega \eta P_x(d\omega)$$

其中$\eta(\omega)$为有界$\mathscr{N}$可测随机变量。由（35）并应用附录（一）的定理 4 及定理 2，可证$E_x\eta$关于x是$\mathscr{B}$可测函数（习题13）。

（四）可列状态的情形

设齐次马氏过程$\{x_t\}$的状态为可列多个，记$E=\{0,1,2,\cdots\}$。运用（一）的定理 1，这时马氏性等价于对任意$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$及$i_1,\cdots,i_n\in E$，只要$P(x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_n}=i_n)>0$，就有

$$P(x_{t_n}=i_n|x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_{n-1}}=i_{n-1})=P(x_{t_n}=i_n|x_{t_{n-1}}=i_{n-1})。\quad(36)$$

齐次性等价于

$$P(x_{s+t}=j|x_s=i)=p(t,i,j)\text{ 与 } s \text{ 无关。}\quad(37)$$

其证明与§4.2例1及（二）的例1完全相同。记

$$p(t,i,j)=p_{ij}(t),\quad t\geqslant 0,\quad i,j\in E$$

并称$\{x_t\}$是以$p_{ij}(t)$为转移概率的**连续参数齐次马尔科夫链**。

今设$p_{ij}(t)$满足**标准性**（或称**连续性**）条件，亦即对一切$i,j\in E$，

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}\quad(38)$$

这时$p_{ij}(t)$有下列性质：

定理 3 $p_{ij}(t)$标准则$p_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上一致连续。且对j也一致成立。

证明 设$p_{ij}(t)$标准。由C-K方程，对任意$h>0$，

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)$$

$$=\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)[1-p_{ii}(h)]。$$

由此可得

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\leqslant \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

$$\leqslant \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h)$$

以及

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geqslant -p_{ij}(t)[1-p_{ii}(h)]$$
$$\geqslant -(1-p_{ii}(h))。$$

因此

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h)\longrightarrow 0 \qquad (h\rightarrow 0)。$$

类似地，当 $h<0$ （$|h|<t$）时，有

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)|\leqslant 1-p_{ii}(|h|)\rightarrow 0\ (h\rightarrow 0)。$$

定理 4 设 $p_{ij}(t)$ 标准，则对一切 $i\neq j$，极限

$$\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}$$

存在且有限。

证明 对 $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$，由标准性存在 $\delta>0$，使得当 $t\leqslant\delta$ 时，

$$p_{ii}(t)>1-\varepsilon,\quad p_{jj}(t)>1-\varepsilon。\tag{39}$$

往下先证对任意 $t,h>0$，只要 $h\leqslant t\leqslant\delta$，就有

$$p_{ij}(h)\leqslant\frac{p_{ij}(t)}{n}\cdot\frac{1}{1-3\varepsilon},\tag{40}$$

其中 $n=\left[\frac{t}{h}\right]$，亦即不超过 $\frac{t}{h}$ 的最大整数。为此，记

$$\left.\begin{aligned} {}_jp_{ik}(h) &= p_{ik}(h), \\ {}_jp_{ik}(mh) &= \sum_r {}_jp_{ir}((m-1)h)p_{rk}(h), \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

即${}_jp_{ik}(mh)$ 表示自 i 出发，在时刻mh处于状态 k，但在时刻 h，$2h,\cdots,(m-1)h$ 不处于 j 的概率。于是，当 $h\leqslant t\leqslant\delta$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon &> 1-p_{ii}(t)=\sum_{k\neq i} p_{ik}(t) \\ &\geqslant p_{ij}(t)\geqslant \sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh)p_{jj}(t-mh) \\ &\geqslant (1-\varepsilon)\cdot \sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh). \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh)\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{42}$$

其次，由

$$p_{ii}(mh)={}_jp_{ii}(mh)+\sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh)p_{ji}((m-l)h)$$

及（39），（42）得

$$\begin{aligned} {}_jp_{ii}(mh) &\geqslant p_{ii}(mh)-\sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh) \\ &\geqslant 1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \end{aligned} \tag{43}$$

从而由（39），（42），（43）得

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\geqslant \sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ii}((m-1)h)p_{ij}(h)p_{jj}(t-mh) \\ &\geqslant n\left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)p_{ij}(h)(1-\varepsilon) \\ &\geqslant n(1-3\varepsilon)p_{ij}(h). \end{aligned}$$

此即（40）式。

以 h 除（40）式的两边，得

$$\frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon} \cdot \frac{p_{ij}(t)}{nh}.$$

当 $h \to 0^+$ 时，$nh \to t$。既然 $p_{ij}(t)$ 对 t 连续，故

$$\overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon} \cdot \frac{p_{ij}(t)}{t}, \tag{44}$$

令 $t \longrightarrow 0^+$ 得

$$\overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon} \underline{\lim_{t \to 0+}} \frac{p_{ij}(t)}{t},$$

再令 $\varepsilon \to 0^+$，即得证极限

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$

存在，且由（44）知 $q_{ij} < \infty$。

定理 5 设 $p_{ij}(t)$ 标准，则对每一 i，极限

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = q_i$$

存在，但可能等于 $+\infty$。

证明 我们先指出，由标准性可推得 $p_{ii}(t) > 0$，$t \geqslant 0$。实际上，对任意固定的 $t > 0$，当 n 充分大时，由（38）知 $p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) > 0$。故由C-K方程即知

$$p_{ii}(t) \geqslant \left[p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n > 0.$$

令

$$f(t) = -\log p_{ii}(t),$$

它非负有限，且由于 $p_{ii}(s+t) \geqslant p_{ii}(s) p_{ii}(t)$，故

$$f(s+t) \leqslant f(s) + f(t). \tag{45}$$

于是对 $t>0$，$h>0$，取 n 使 $t=nh+\varepsilon$，$0\leqslant\varepsilon<h$，由(45)得

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\frac{nf(h)}{t}+\frac{f(\varepsilon)}{t}$$

$$=\frac{nh}{t}\cdot\frac{f(h)}{h}+\frac{f(\varepsilon)}{t}.$$

当 $h\to 0$ 时，$\frac{nh}{t}\to 1$ 及 $f(\varepsilon)=-\log p_{ii}(\varepsilon)\to 0$，故

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h},$$

$$\varlimsup_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}\leqslant\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h},$$

从而得知存在极限

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}=q_i,$$

其中 $q_i=\sup\limits_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\infty$。由上式及 $f(t)$ 的定义，当 $h\to 0^+$，$\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=\frac{1-e^{-f(t)}}{t}=[1+o(1)]\frac{f(t)}{t}\longrightarrow q_i$。

系 设 $p_{ij}(t)$ 标准，则

$$0\leqslant\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant q_i.$$

证明 因

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1-p_{ii}(t)}{t},\tag{46}$$

令 $t\to 0^+$，由Fatou引理得

$$q_i=\lim_{t\to 0^+}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}\geqslant\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

矩阵$Q=(q_{ij})$，其中$q_{ii}=-q_i$，称为$\{x_t\}$的**密度矩阵**。称Q为**保守的**，如果对一切i有

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}=q_i<\infty,$$

当$\{x_t\}$的状态有限时，由（46）知Q必保守。

在马氏链理论中，q_{ij}是很重要的量，其概率意义将在后面叙述。在一般情况下，要知道全部$p_{ij}(t)$，$t>0$，较困难。由于q_{ij}只涉及$p_{ij}(t)$在瞬时区间$[0,\varepsilon]$的值，故在实际中往往给出的是q_{ij}。通常q_{ij}可根据实验或观测资料近似地确定其值。下面的定理指出如何由q_{ij}求$p_{ij}(t)$。

定理 6　设Q保守，则导数$p'_{ij}(t)$存在，有限且连续，其值为

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}p_{kj}(t). \tag{47}$$

证明　由C-K方程，对任意$h>0$及$t>0$

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{k \neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

$$-\frac{1-p_{ii}(h)}{h}\cdot p_{ij}(t),$$

令$h\to 0^+$，由上面的定理及附录（一）定理7，得右导数

$$\frac{d^+p_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t)-q_ip_{ij}(t)\leqslant\sum_{k} q_{ik}<\infty. \tag{48}$$

由控制收敛定理知，上式右方是t的连续函数，再根据连续函数如其右导数存在且连续，则其导数必存在且等于右导数这一事实，由（48）可知（47）成立且$p'_{ij}(t)$连续。

定理6的逆也成立（习题31）。方程（47）称为Колмогоров**向后方程**。以上几个定理推广到连续状态的场合见[1]第六章。

为研究q_{ij}的概率意义，需要进一步假设过程$\{x_t\}$是标准的，因而有

$$p_{ij}(t)=P_i(x_t=j).$$

由前面证明得知，$p'_{ij}(0)=q_{ij}$，$p'_{ii}(0)=-q_i$均存在。

引理 1　$\{x_t\}$关于P_i右随机连续。

证明　$P_i(|x_t-x_{t+h}|>\varepsilon)\leqslant P_i(x_t\neq x_{t+h})$

$$=\sum_j p_{ij}(t)(1-p_{jj}(h))\to 0\ (h\to 0^+).$$

由此可见，如$\{x_t\}$可分，据§1.2定理1（注意，定理的条件可改为右随机连续）知，$\{x_t\}$完全可分，令

$$\tau=\inf\{t: t>0,\ x_t\neq x_0\}.$$

τ表示首次离开初始状态的时间，试问τ的分布如何？以下恒设测度P_i完备。

定理 7　设$\{x_t\}$可分，对任意i及$t\geqslant 0$，有

$$P_i(x_u=i,\ 0\leqslant u\leqslant t)=e^{-q_i t}.$$

证明　固定$t>0$，取$R=\left\{\frac{k}{2^n},\ k,n=0,1,\cdots\right\}$为可分集。由可分性及§4.3定理1和定理5

$$P_i(x_u=i,\ 0\leqslant u\leqslant t)=\lim_{n\to\infty}P_i\left(x\left(\frac{kt}{2^n}\right)\right.$$

$$\left.=i,\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}}\cdot\frac{t}{2^n}\cdot 2^n\right]=e^{-q_i t}.$$

换言之，我们得$P_i(\tau>t)=e^{-q_i t}$，从而$E_i\tau=\frac{1}{q_i}$。可见q_i的大小决定x_t停留在状态i的（平均）时间的长短，故q_i决定

状态 i 的转移速度。

定理 8 设 $\{x_t\}$ 可分，如 $\{q_i\}$ 有界，则以 P_i 概率 1 样本函数是阶梯的。

证明 令 $\sup\limits_i q_i = \alpha < \infty$。对 $0 \leqslant s < t$，

$$
\begin{aligned}
P_i(x_s \neq x_t) &= \sum_j p_{ij}(s)(1 - p_{jj}(t-s)) \\
&\leqslant \sup_j (1 - p_{jj}(t-s)) \leqslant 1 - e^{-\alpha(t-s)} \\
&\leqslant 2\alpha(t-s),
\end{aligned}
$$

由 §1.4定理 2，以 P_i 概率 1 样本函数是阶梯的。

定理 9 设 $\{x_t\}$ 可分，$0 < q_i < \infty$，则对任意实数 $a > 0$ 及状态 $j \neq i$，有

(i) $P_i(\omega: x_t(\omega)$ 在 $[0, a)$ 中有第一个断点 $\tau(\omega)$，它是跳跃点且 $x_u(\omega) = i$，$0 \leqslant u < \tau(\omega)$，$x_{\tau+0}(\omega) = j) = (1 - e^{-q_i a})\dfrac{q_{ij}}{q_i}$，

(ii) $P_i(\omega: x_t(\omega)$ 在 $[0, \infty)$ 中有第一个断点 $\tau(\omega)$，它是跳跃点且 $x_u(\omega) = i$，$0 \leqslant u < \tau(\omega)$，$x_{\tau+0}(\omega) = j) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$。

证明 任取 $\beta > 0$，定义 ω 集列

$D_n(\beta) = (\omega$：存在整数 v，$2 \leqslant v \leqslant 2^n$，使得

$$
x_t(\omega) = \begin{cases} i, & \text{如 } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{v-1}{2^n} a \\ j, & \text{如 } \dfrac{va}{2^n} \leqslant t \leqslant \dfrac{va}{2^n} + \beta \end{cases}).
$$

记

$$
\begin{aligned}
D(\beta) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} D_n(\beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} D_n(\beta) \\
&= \lim_{n \to \infty} D_n(\beta).
\end{aligned}
$$

上式中第二个等号成立是因为如 $n_1 \leqslant n < n_2$，且 $\omega \in D_{n_1}(\beta) \cap D_{n_2}(\beta)$，则 $\omega \in D_{n_2}(\beta)$，只需 n_1 充分大。

注意 $\beta \downarrow 0$ 时 $D(\beta)$ 不降。故可定义

$$D = \lim_{\beta \downarrow 0} D(\beta) = \lim_{n \to \infty} D\left(\frac{1}{n}\right) = \bigcup_{\beta > 0} D(\beta).$$

于是，如 $\omega \in D$，则存在 $\tau = \tau(\omega)$，$0 < \tau \leqslant a$，使得在 $[0, \tau)$ 中 $x_t(\omega) = i$ 且在某一以 τ 为左端点的开区间中，$x_t(\omega) = j$，因此，由可分性知 $x_\tau(\omega)$ 必等于 $x_{\tau-0}(\omega)$ 或 $x_{\tau+0}(\omega)$。故由定理 7 得

$$P_i(D_n(\beta)) = \sum_{v=2}^{2^n} e^{-q_i \frac{v-1}{2^n} a} p_{ij}\left(\frac{a}{2^n}\right) e^{-q_j \beta}$$

$$= \frac{e^{-q_i \frac{a}{2^n}} - e^{-q_i a}}{\left(1 - e^{-q_i \frac{a}{2^n}}\right)\left(\frac{a}{2^n}\right)^{-1}} \cdot \frac{p_{ij}\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} \cdot e^{-q_j \beta}$$

$$\to \frac{1 - e^{-q_i a}}{q_i} \cdot q_{ij} e^{-q_j \beta} \qquad (n \to \infty)$$

$$\to (1 - e^{-q_i a}) \frac{q_{ij}}{q_i} \qquad (\beta \to 0).$$

换言之，$P_i(D) = (1 - e^{-q_i a}) \frac{q_{ij}}{q_i}$，而 D 即为（i）左方括号中的 ω 集。故（i）得证。在（i）中令 $a \to \infty$ 即得(ii)。

由 $P_i(\tau > t) = e^{-q_i t}$ 知 $P_i(\tau = t) = 0$，故可假定 $\{x_t\}$ 在 τ 点右连续而不影响其有限维联合分布。因此，在定理 9 中可把 $x_{\tau+0}$ 改为 x_τ。

定理 7 至 9 推广到连续状态的场合见〔1〕第六章。

（五）马氏性的等价形式

（Ⅰ）推移算子

设$\{x_t\}$为标准齐次马氏过程。为便于把马氏性（32）写成更一般的等价形式，我们引进推移算子如下：

对每一$t \geqslant 0$，定义θ_t为满足如下条件的Ω到Ω中的映射：对任意$s \geqslant 0$，有

$$x_s(\theta_t\omega) = x_{s+t}(\omega), \tag{49}$$

并称$\{\theta_t,\ t \geqslant 0\}$为$\{x_t\}$的**推移算子族**。

设$\{\theta_t\}$为$\{x_t\}$的推移算子族，则对$A \in \mathscr{N}$，定义

$$\theta_t^{-1}A = (\omega : \theta_t\omega \in A); \tag{50}$$

对$\mathscr{N}$可测函数$\eta(\omega)$，定义

$$\theta_t\eta(\omega) = \eta(\theta_t\omega). \tag{51}$$

据定义容易证明θ_t有下列简单性质（习题14）：

性质 1　对任意$A, B, A_\alpha \in \mathscr{N}$，$A \supset B$，有

（i）　$\theta_t^{-1}(A - B) = \theta_t^{-1}A - \theta_t^{-1}B$.

（ii）　$\theta_t^{-1}\{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\} = \bigcup\limits_\alpha \theta_t^{-1}A_\alpha$，其中$\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \in \mathscr{N}$；

$\theta_t^{-1}\{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha\} = \bigcap\limits_\alpha \theta_t^{-1}A_\alpha$，其中$\bigcap\limits_\alpha A_\alpha \in \mathscr{N}$.

性质 2　$\theta_t^{-1}(x_s \in \Gamma) = (x_{t+s} \in \Gamma)$.

性质 3　对任意$A \in \mathscr{N}$，$\theta_t I_A = I_{\theta_t^{-1}A}$.

利用附录（一）定理 3 及上面的性质 3，很容易证明如η为$\mathscr{N}$可测，则$\theta_t\eta$为$\mathscr{N}'$可测。如$A \in \mathscr{N}$，则$\theta_t^{-1}A \in \mathscr{N}'$（习题15）。

自然要问满足（49）的映射θ_t是否存在？当$\Omega = R^T$，$\{x_t\}$是由（28）定义的标准马氏过程时，θ_t一定存在。因为这时$\omega = \lambda(\cdot) = \{\lambda(s),\ s \geqslant 0\}$，而$x_s(\omega) = \lambda(s)$。如果定义$\theta_t\omega = \lambda(t + \cdot)$，则

$$x_s(\theta_t\omega) = \lambda(t + s) = x_{t+s}(\omega),\quad s \geqslant 0.$$

对一般的Ω，可能θ_t不存在。但我们总可以用扩大基本空间Ω的

方法，使得满足（49）的映射θ_t存在，而且又不影响原过程的概率性质（见习题17及18）。因此，往后我们总假定θ_t存在。这时马氏性（32）可改写为

$$P_x(\theta_s^{-1}(x_t\in\Gamma)|\mathscr{N}_s)=p(t,x_s,\Gamma)$$
$$=P_{x_s}(x_t\in\Gamma)\qquad \text{a}\cdot\text{e}\cdot P_x.$$

（Ⅱ）马氏性的等价形式。

类似于§4.2定理2，我们有

定理10 设$\{x_t\}$为标准马氏过程，则下列诸条件等价（等号均指$\text{a}\cdot\text{e}\cdot P_x$成立）：

（a）对任意$s,t\geqslant 0$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，$x\in E$，

$$P_x(\theta_s^{-1}(x_t\in\Gamma)|\mathscr{N}_s)=P_{x_s}(x_t\in\Gamma);\tag{52}$$

（b）对任意$s,t\geqslant 0$及有界$\mathscr{B}$可测函数$f(y)$，$y\in E$，

$$E_x(\theta_sf(x_t)|\mathscr{N}_s)=E_{x_s}f(x_t);\tag{53}$$

（c）对任意$s,t\geqslant 0$及有界$\mathscr{N}$可测随机变量$\eta(\omega)$，

$$E_x(\theta_s\eta|\mathscr{N}_s)=E_{x_s}\eta.\tag{54}$$

证明 我们证明（a）⇒（c）⇒（b）⇒（a）。

（a）⇒（c）：设$\{x_t\}$的转移函数为$p(t,x,\Gamma)$，因$\{x_t\}$是$(\Omega,\mathscr{N},P_x)$上的齐次马氏过程，故由§4.2定理2，我们有

$$E_x(\theta_s\eta|\mathscr{N}_s)=E_x(\theta_s\eta|x_s),$$

从而证明（54）化为证明

$$E_x(\theta_s\eta|x_s)=E_{x_s}\eta.\tag{55}$$

$E_x\eta$是$\mathscr{B}$可测函数（习题13），故$E_{x_s}\eta$为$\sigma(x_s)$可测。其次，令

$$\mathscr{L}=\{\text{全体有界}\ \eta(\omega)\},$$
$$L=\{\eta:\eta\ \text{使（55）成立}\},$$

则L是$\mathscr{L}$系。故据附录(一)定理2，只需证明对任意$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，$B=(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)$，$I_B\in L$即可，即证明

$$P_x(x_{s+t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n|x_s)=P_{x_s}(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n).\tag{56}$$

为此，先假定$t_1>0$。则对$A=(x_s\in\Gamma_0)$，我们有

$$\int_A P_{x_s}(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)P_x(d\omega)$$

$$=\int_{\Gamma_0}P_{y_0}(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)\tilde{p}(dy_0),\quad (57)$$

其中$\tilde{p}(\Gamma)=P_x(x_s\in\Gamma)=p(s,x,\Gamma)$。于是，(57)的右方由定理1等于

$$\int_{\Gamma_0}p(s,x,dy_0)\int_{\Gamma_1}p(t_1,y_0,dy_1)$$

$$\cdot\int_{\Gamma_2}p(t_2-t_1,y_1,dy_2)\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_n-t_{n-1},y_{n-1},dy_n)$$

$$=P_x(x_s\in\Gamma_0,x_{s+t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)$$

$$=P_x(A,x_{s+t_i}\in\Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant n),\quad (58)$$

可见（56）成立。

如果$t_1=0$。那么（56）的左方等于

$$I_{(x_s\in\Gamma_1)}P_x(x_{s+t_i}\in\Gamma_i,\ 2\leqslant i\leqslant n\,|x_s),\quad (59)$$

而（56）的右方因为不大于

$$P_{x_s}(x_0\in\Gamma_1)=p(0,x_s,\Gamma_1)$$

$$=I_{(x_s\in\Gamma_1)},$$

所以在集$(x_s\notin\Gamma_1)$上，(56)的两边都等于零。在$(x_s\in\Gamma_1)$上，因$P_{x_s}(x_0\in\Gamma_1)=1$，故（56）的右方等于

$$P_{x_s}(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 2\leqslant i\leqslant n),\quad (60)$$

从而由（59），（60）知，当$t_1=0$时，（56）在集$(x_s\in\Gamma_1)$上化为

$$P_x(x_{s+t_i}\in\Gamma_i,\ 2\leqslant i\leqslant n\,|x_s)=P_{x_s}(x_{t_i}\in\Gamma_i,\ 2\leqslant i\leqslant n),\ (61)$$

其中$0<t_2<\cdots<t_n$，亦即化为如同$t_1>0$的情形。因此，只需将$(x_s\in\Gamma_1)$视为Ω，由上所证即知（61）成立，从而（56）成立。

(c)⇒(b) 只需令$\eta=f(x_t)$。

(b)⇒(a) 只需取$f(y)=I_\Gamma(y)$。

系 设$\{x_t\}$为标准马氏过程，则条件（a）与下面的条件

等价：

（d）对任一有界$\mathscr{N}_s$可测的随机变量ξ及任一有界$\mathscr{N}$可测的随机变量η，有

$$E_x(\xi\theta_s\eta)=E_x(\xi E_{x_s}\eta). \tag{62}$$

证明 （a）⇒（d）设（a）成立，由定理3知（c）成立。所以

$$\begin{aligned}E_x(\xi\theta_s\eta)&=E_x\{E_x(\xi\theta_s\eta|\mathscr{N}_s)\}\\&=E_x\{\xi E_x(\theta_s\eta|\mathscr{N}_s)\}\\&=E_x(\xi E_{x_s}\eta).\end{aligned}$$

（d）⇒（a）在（62）中令$\xi=I_A$，$A\in\mathscr{N}_t$，即知（54）成立，从而由定理3知（a）成立。

注 由（44），（46）可得

$$P(\theta_t^{-1}(x_t\in\Gamma)|\mathscr{N}_t)=P_{x_t}(x_t\in\Gamma)\qquad \text{a}\cdot\text{e}\cdot P. \tag{63}$$

比较（63）与（52）可知，用相同的方法可以证明定理10及系中的P_x和E_x分别换成P和E，其结论仍正确。

至此，我们已将马氏过程的三种定义及其关系叙述完毕。其中标准齐次马氏过程是我们往后讨论的对象。

***（六）σ代数$\mathscr{N}$，$\mathscr{N}_t$及$\mathscr{B}$关于测度族的完备化.**

在许多场合，我们需要把标准马氏过程的自然σ代数流扩展，使它们能包含更多的事件，而同时保留过程的马尔科夫性不变．扩展的方法就是σ代数关于测度族的完备化。在这段里，我们简单地介绍其概念及结果，有关细节见习题19—27。

设$\mathscr{F}$为σ代数，μ是$\mathscr{F}$上的有穷测度．令

$\mathscr{F}^\mu=\{A$：存在$A_1,A_2\in\mathscr{F}$，$A_1\subset A\subset A_2$，且$\mu(A_1)=\mu(A_2)\}$。则$\mathscr{F}^\mu$是σ代数，并称它为$\mathscr{F}$**关于μ的完备化σ代数**．易见$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^\mu$，且可以证明（习题19）$A\in\mathscr{F}^\mu$当且仅当存在$B$，$D\in\mathscr{F}$，使$\mu(D)=0$且$A\triangle B\subset D$．其中符号△表示集$A$和$B$的对称差，即$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$。

如果对$A\in\mathscr{F}^\mu$定义

$$\mu(A)=\mu(A_1)=\mu(A_2),$$

我们就把测度μ拓展到$\mathscr{F}^{\mu}$上。仍记拓展后的测度为μ。

定义 6　设$\mathscr{F}$是σ代数，$Q=\{\mu\}$为$\mathscr{F}$上的一族有穷测度。称σ代数

$$\mathscr{F}^{Q}=\bigcap_{\mu\in Q}\mathscr{F}^{\mu}$$

为$\mathscr{F}$**关于测度族**Q**的完备化**σ代数。如果Q^{*}表示$\mathscr{F}$上的全体有穷测度所成的集，则称$\mathscr{F}^{Q^{*}}$中的元素为由$\mathscr{F}$产生的**普遍可测集**。

由定义知$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^{Q}$，且拓展后每一$\mu\in Q$在$\mathscr{F}^{Q}$上都有定义。

设已给标准齐次马氏过程$\{x_t\}$。对$\mathscr{B}$上的任一有穷测度μ，按下法可在$\mathscr{N}$上产生一个有穷测度P_{μ}：

$$P_{\mu}(A)=\int_{E}P_{x}(A)\mu(dx),\quad A\in\mathscr{N}.$$

易见，如μ为概率测度，则P_{μ}也是概率测度。如$\mu=\mu_x$（质量集中在x点），则$P_{\mu}=P_{x}$。

令$\mathscr{N}^{*}$表示包含一切集$(x_t\in\Gamma)$，$t\geqslant 0$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，而且对任意交、任意并及余集运算封闭的最小子集系。记

$$Q^{*}=\{\mathscr{B}\text{上全体有穷测度}\},$$

$$P=\{P_{\mu}:\mu\in Q^{*}\},$$

并记

$$\overline{\mathscr{N}}=\mathscr{N}^{P}\cap\mathscr{N}^{*},$$

$$\overline{\mathscr{N}}_t=\mathscr{N}_t^{P}\cap\mathscr{N}^{*},$$

$$\overline{\mathscr{B}}=\mathscr{B}^{Q^{*}},$$

可以证明（习题25），$\{x_t,\ \overline{\mathscr{N}}_t,\ t\geqslant 0\}$视为$(\Omega,\ \overline{\mathscr{N}},\ P_x)$上的随机过程仍是标准齐次马氏过程，其状态空间为$(E,\ \overline{\mathscr{B}})$。其中$P_x$总假定已按前述拓展到$\overline{\mathscr{N}}$上。故必要时不妨一开始就假定$\mathscr{N}=\overline{\mathscr{N}}$，$\mathscr{N}_t=\overline{\mathscr{N}}_t$，$\mathscr{B}=\overline{\mathscr{B}}$。

习 题

1. 设$E=[0,1]$，$\mathscr{B}=\mathscr{B}_{[0,1]}$，$L$为$\mathscr{B}$上的勒贝格测度。证明

$$p(t,x,A)=e^{-t}I_A(x)+(1-e^{-t})L(A),$$

是齐次转移函数，其中$t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{B}$。并证明

$$\lim_{t\to 0} p(t,x,\{x\})=1.$$

2. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为独立随机变量序列。试问$\{x_n\}$是否是具有转移函数的马氏过程？如是，指出其转移函数。

3. 设随机过程$\{x_t, t\geqslant 0\}$满足对一切$t\geqslant 0$有

$$P(x_t=vt)=1,$$

其中$v>0$为常数。证明$\{x_t\}$是具有转移函数的齐次马氏过程，并写出其转移函数。

提示 造转移函数

$$p(s,x;t,\Gamma)=I_\Gamma(x+(t-s)v).$$

4. 证明初始为0的Poisson过程为具有Poisson转移函数的齐次马氏过程。

5. 设$\{x_t, t\geqslant 0\}$是以$p(s,x;t,\Gamma)$为转移函数的马氏过程，其中$x\in R_1$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$。如果$p(s,x;t,\Gamma)$满足**空间齐次性**条件，亦即对一切$0\leqslant s<t$，x，$h\in R_1$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$，有

$$p(s,x;t,\Gamma)=p(s,x+h;t,\Gamma+h),$$

其中$\Gamma+h=\{y+h; y\in\Gamma\}$。证明$\{x_t\}$是独立增量过程。

提示 利用定理1。

6. 证明Wiener和Poisson转移函数满足空间齐次性条件。

7. 设已给可测空间$(E,\mathscr{B})$，概率测度$\mu(\Gamma)$，$\Gamma\in\mathscr{B}$及满足下列两条件的函数$p(x,\Gamma)$，$x\in E$，$\Gamma\in\mathscr{B}$：

(i) 对固定的x，$p(x,\Gamma)$是$\mathscr{B}$上的概率测度；

(ii) 对固定的Γ，$p(x,\Gamma)$关于x是$\mathscr{B}$可测函数。

证明如取值于$(E,\mathscr{B})$的随机序列$\{x_n, n\geqslant 0\}$的有限维联合分布可表示成

$$P(x_0\in\Gamma_0,\ x_1\in\Gamma_1,\cdots,x_n\in\Gamma_n)$$
$$=\int_{\Gamma_0}\mu(dy_0)\int_{\Gamma_1}p(y_0,dy_1)\cdots\int_{\Gamma_n}p(y_{n-1},dy_n),$$
则$\{x_n\}$是马氏过程，且对$n\geqslant 0$有
$$P(x_{n+1}\in\Gamma|x_0,\cdots,x_n)=p(x_n,\Gamma)\ \text{a. e.}.$$

8．Ornstein-Uhlenbeck过程。

设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为Wiener过程，其中参数$\sigma=1$。称随机过程
$$U_t=e^{-t}x(e^{2t}),\quad t\geqslant 0$$
为Ornstein-Uhlenbeck过程。试证

（i）$\{U_t\}$是正态过程；

(ii) $\{U_t\}$是马氏过程；

(iii) 求$\{U_t\}$的数学期望和协方差函数；

(iv) $\{U_t\}$是平稳过程。

9．假设与习题8同。证明$\{U_t\}$的转移函数为
$$p(s,x;t,\Gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{[2\pi(1-e^{-2(t-s)})]^{1/2}}\\ \cdot\displaystyle\int_\Gamma\exp\left[-\frac{(y-e^{-(t-s)}x)^2}{2(1-e^{-2(t-s)})}\right]dy, & \text{如}\ s<t,\\ I_\Gamma(x), & \text{如}\ s=t.\end{cases}$$

▲10．设齐次马氏过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$的转移函数$p(t,x,\Gamma)$，$x\in R_1$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$，有密度$q(t,x,y)$，亦即
$$p(t,x,\Gamma)=\int_\Gamma q(t,x,y)dy.$$

令$u(x,s)$，$x\in R_1$，$s\geqslant 0$，对固定的s，关于x是$\mathscr{B}_1$可测函数，且满足方程
$$u(x,s)=\int_{R_1}q(t,x,y)u(y,t+s)dy,$$
试证随机过程$Z_t=u(x_t,t)$，如$E|Z_t|<\infty$，具有性质
$$E(Z_{t+s}|x_v,\ 0\leqslant v\leqslant s)=Z_s\quad \text{a. e.}\ (s,t>0),$$

注 凡满足上式的随机过程$\{Z_t\}$称为关于σ代数流$\{\mathscr{N}_s=\sigma(x_v,\ 0\leqslant v\leqslant s)\}$的鞅。此题指出如何据已给的马氏过程构造鞅。例如
$$q(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}$$

时，可取 $u(x,s)=x^2-s$ 或 $u(x,s)=\exp\left\{\lambda x-\frac{1}{2}\lambda^2 s\right\}$，其中 λ 是任意实数。

11．设马氏过程 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 的转移函数为 $p(s,x;t,\Gamma)$，$x\in R_1$，$\Gamma\in\mathscr{B}_1$。证明对任一有界 $\mathscr{B}_1$ 可测的函数 $f(x)$ 及 $s\leqslant t$，有

$$E[f(x_t)|x_s]=\int_{R^1}f(y)\,p(s,x_s;t,dy)\quad \text{a.e.}$$

12．设 $p(t,x,\Gamma)$ 为转移函数。证明对任一 $t\geqslant 0$，$p(t,x,\{x\})$ 为 $\mathscr{B}_1$ 可测函数。

13．设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为标准齐次马氏过程，证明对任一有界 $\mathscr{N}$ 可测函数 η，$E_x\eta$ 是 $\mathscr{B}_1$ 可测函数。

14．证明本节（五）中推移算子 θ_t 的性质 1，2，3。

15．设 $\{\theta_t\}$ 为 $\{x_t\}$ 的推移算子族，证明

（i）如 η 为 $\mathscr{N}$ 可测，则 $\theta_t\eta$ 为 $\mathscr{N}^t$ 可测；

(ii) 如 $A\in\mathscr{N}$，则 $\theta_t^{-1}A\in\mathscr{N}^t$。

16．假设同上。证明

（i）$\theta_t c=c$，c 为常数；

(ii) 如 η_n 为 $\mathscr{N}$ 可测且 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta$，则

$$\theta_t\eta_n\to\theta_t\eta\quad(n\to\infty)。$$

17．任给可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 及定义在其上的可测函数族 $\{x_t, t\geqslant 0\}$，证明可扩大 Ω 使它满足，对任一 $t\geqslant 0$ 及 $\omega\in\Omega$，一定存在 $\omega_t\in\Omega$，对一切 $s\geqslant 0$ 有 $x_s(\omega_t)=x_{t+s}(\omega)$。

提示 对 $t\geqslant 0$ 及 $\omega\in\Omega$，在 $[0,\infty)$ 上定义函数

$$\varphi_{t\omega}(u)=x_{t+u}(\omega),\quad u\geqslant 0。$$

令 $\widetilde{\Omega}=\Omega\cup\{\varphi_{t\omega}, t\geqslant 0, \omega\in\Omega\}$，在 $\widetilde{\Omega}$ 上定义

$$\widetilde{x}_s(\widetilde{\omega})=\begin{cases}x_s(\omega), & \text{如 } \widetilde{\omega}=\omega\in\Omega,\\ \varphi_{t\omega}(s), & \text{如 } \widetilde{\omega}=\varphi_{t\omega}.\end{cases}$$

定义 σ 代数 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 如下：令

$$\widetilde{A}\subset\widetilde{\Omega},\quad \widetilde{A}\in\widetilde{\mathscr{F}},\quad \text{如果 } \widetilde{A}\Omega\in\mathscr{F},$$

则 $\widetilde{x}_s$ 为 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$ 可测函数，而且满足题中的要求。

18．设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程。将 $(\Omega,$

$\mathscr{F}$）按第17题的方法扩大为$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$，使它满足第17题的条件。如在$\sigma$代数$\widetilde{\mathscr{F}}$上定义概率测度$\widetilde{P}$如下：

$$\widetilde{P}(\widetilde{A})=P(\widetilde{A}\Omega),\quad \widetilde{A}\in\widetilde{\mathscr{F}}.$$

试证

（i）$\mathscr{N}_t=\Omega\widetilde{\mathscr{N}}_t$，其中$\widetilde{\mathscr{N}}_t=\sigma(\tilde{x}_u,\ u\leqslant t)$；

(ii) 如$\{x_t\}$为马氏过程，则$\{\tilde{x}_t\}$也是马氏过程。

19. 证明$A\in\mathscr{F}^\mu$当且仅当存在$B\in\mathscr{F}$，$D\in\mathscr{F}$使$\mu(D)=0$且$A\triangle B\subset D$。

20. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程。证明$\eta(\omega)$是$\mathscr{N}^\mu$有界可测的充要条件为对任一$\mu\in Q^*$存在$\mathscr{N}$有界可测的η_1，η_2，使$\eta_1\leqslant\eta\leqslant\eta_2$且

$$P_\mu(\eta_2-\eta_1>0)=0.$$

21. 假设同第20题。证明如$\eta(\omega)$为有界$\overline{\mathscr{N}}$可测，则$E_x\eta$为$\overline{\mathscr{B}}$可测。

提示 利用第20题。

22. 设已给两个可测空间$(E_i,\mathscr{G}_i)$，$i=1,2$，令Q_i^*为$\mathscr{G}_i$上的全体有穷测度，f为$(E_1,\mathscr{G}_1)\to(E_2,\mathscr{G}_2)$的映射。试证如对一切$\mu\in Q_1^*$有$\mu f^{-1}\in Q_2^*$，则$f$为$(E_1,\mathscr{G}_1^{Q_1^*})\to(E_2,\mathscr{G}_2^{Q_2^*})$的映射。

23. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程，$(E,\mathscr{B})$为状态空间，证明x_t为$(\Omega,\overline{\mathscr{N}})\to(E,\overline{\mathscr{B}})$的函数。进而证明对任一有界$\overline{\mathscr{B}}$可测函数$f$，$E_xf(x_t)$为$\overline{\mathscr{B}}$可测函数。

提示 利用第22题。

24. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程，证明

（i）如$A\in\overline{\mathscr{N}}_t$，则$\theta_s^{-1}A\in\overline{\mathscr{N}}_{s+t}$，$s\geqslant 0$；

(ii) 如$A\in\overline{\mathscr{N}}$，则$\theta_s^{-1}A\in\overline{\mathscr{N}}$，$s\geqslant 0$。

25. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程，证明对任一$A\in\overline{\mathscr{N}}$及$s\geqslant 0$，有

$$P_x(\theta_s^{-1}A|\overline{\mathscr{N}}_s)=P_{x_s}(A),\qquad \text{a.e. } P_x.$$

26. 假设同上题，证明对任一有界$\overline{\mathscr{N}}$可测函数$\eta(\omega)$，有

$$E_x(\theta_s\eta|\overline{\mathscr{N}}_s)=E_{x_s}\eta\quad \text{a.e. } P_x.$$

27. 假设同上题，证明对任一有界$\overline{\mathscr{N}}$可测函数$\eta(\omega)$及有界$\overline{\mathscr{N}}_s$可测函数$\xi(\omega)$，有

$$E_x(\xi\theta_t\eta)=E_x(\xi E_{x_t}\eta).$$

28．0-1律．假设同上题．证明对任一$A\in\overline{\mathcal{N}}_0$及$x\in E$有$P_x(A)=0$或1．

29．设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程，其样本函数右连续．对每一$x\in E$，定义

$$\tau_x=\inf\{\ t: t\geqslant 0,\ x_t\neq x\}$$

证明

（i）τ_x是随机变量；

(ii) 对每x，存在$\lambda(x)$，$0\leqslant\lambda(x)\leqslant\infty$，使得

$$P_x(\tau_x>t)=e^{-\lambda(x)t}.$$

30．设$\{x_t\}$为连续参数齐次马氏链，其转移概率$p_{ij}(t)$满足标准性条件且$q_i<\infty$．证明

$$\sum_j|p'_{ij}(t)|\leqslant 2q_i\qquad(t\geqslant 0).$$

31．假设同上，试证如Колмогоров向后方程成立，则Q保守．

32．试证$\{q_i\}$有界的充要条件为$\lim\limits_{t\to 0+}p_{ii}(t)=1$对$i$一致成立．

§4.4 强马尔科夫过程

设$\{x_t,\ \ t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程．在许多场合，例如在研究过程的样本函数性质时，需要把马氏性

$$E_x[f(x_{s+t})|\mathcal{N}_s]=E_{x_s}f(x_t)\qquad(1)$$

中的固定时间s换成非负随机变量$\tau(\omega)$，同时仍保持条件(1)成立．换言之，要求$\{x_t\}$具有比马氏性更强的性质（称为**强马氏性**）．在一般情况下，那样的替换未必可行．为使替换后(1)有定义和成立，需对$\tau(\omega)$及$\{x_t\}$本身附加某种条件．为此，下面引进**停时**及**循序可测**概念．

（一）停时

考虑到第五章的需要，在这段里我们介绍一般的停时概念及其基本性质．因此，本段的大部分内容也可等到念第五章时

再看。

Ⅰ. **定义**

定义1 定义在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的非负可测函数 $\tau(\omega)$(可取 $+\infty$ 为值)，称为关于 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 是**停时**，如果对任一 $t\geqslant 0$，有

$$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t. \qquad (2)$$

如果 $\tau(\omega)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$，则 (2) 等价于对任意 $n\geqslant 0$，有

$$(\tau=n)\in\mathscr{F}_n.$$

停时可直观地理解为：设想我们观察一随机质点，假定到时刻 t 为止所观测到的有关该质点运动的全部信息包含在 $\mathscr{F}_t$ 中。今欲观察与该质点有关的某一事件 A，而 A 的发生时刻 τ 是随机的。如果对任意时刻 t，根据 $\mathscr{F}_t$ 就能判断 A 是否已发生，亦即对任意 t，$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t$。则事件 A 发生的时刻 τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。

例1 $\tau(\omega)=t$。易见 τ 关于任一 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是停时。

例2 设 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 为齐次马氏链，i 为常返状态。则首达时间

$$\tau_i(\omega)=\min\{n: n>0, x_n(\omega)=i\},$$
$$=\infty, \text{ 如对一切 } n>0, x_n(\omega)\neq i$$

是马氏时间。这是因为

$$(\tau_i=k)=(x_1\neq i, \cdots, x_{k-1}\neq i, x_k=i)\in\mathscr{N}_k.$$

例3 设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 适应过程，相空间为 $(R_1, \mathscr{B}_1)$。且 $\{x_t\}$ 的每一个样本函数是连续的。则首达或超出水平 a 的时间

$$\tau_a(\omega)=\inf\{t, t\geqslant 0, x_t(\omega)\geqslant a\}$$

为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。

实际上，令 R 为非负有理数全体。由 $x(t, \omega)$ 的连续性，

对 $t \geqslant 0$ 有

$$(\tau_a > t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\min_{0 \leqslant u \leqslant t} (a - x_u) \geqslant \frac{1}{k} \right)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{0 \leqslant r \leqslant t \\ r \in R}} \left(a - x_r \geqslant \frac{1}{k} \right) \in \mathscr{F}_t,$$

故 $(\tau_a > t) \in \mathscr{F}_t$。

记

$$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{t \geqslant 0} \mathscr{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t \geqslant 0} \mathscr{F}_t \right).$$

由（2）知，如 τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，则

$$(\tau = \infty) = (\tau < \infty)^c \in \mathscr{F}_\infty.$$

对给定的 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$，定义新的 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 如下：对每一 $0 \leqslant t < \infty$，令

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathscr{F}_s.$$

易见 $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+}$。

定义 2 称 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ 为**右连续**的，如对一切 $0 \leqslant t < \infty$，

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}.$$

一般地 $\{\mathscr{F}_t\}$ 未必右连续，但我们可把它右连续化，方法是令 $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t+}$，则 $\{\mathscr{G}_t\}$ 是右连续的。

引理1 如 τ 为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，则对一切 $t \geqslant 0$，

$$(\tau < t) \in \mathscr{F}_t, \tag{3}$$

从而 $(\tau = t) \in \mathscr{F}_t$。

证明 因为

$$(\tau < t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\tau \leqslant t - \frac{1}{k} \right)$$

而$\left(\tau\leqslant t-\frac{1}{k}\right)\in\mathscr{F}_{t-\frac{1}{k}}\subset\mathscr{F}_t$，故$(\tau<t)\in\mathscr{F}_t$。

引理的逆未必成立。但如$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则（2）与（3）等价（见下面的引理2）。通常称满足（3）的τ为$\{\mathscr{F}_t\}$**宽停时**。τ为$\{\mathscr{F}_t\}$宽停时等价于τ为$\{\mathscr{F}_{t+}\}$停时（习题1）。

引理 2 设$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则τ为$\{\mathscr{F}_t\}$停时的充要条件为(3)成立。

证明 必要性已证。充分性由于

$$(\tau\leqslant t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\tau<t+\frac{1}{k}\right)\in\mathscr{F}_{t+\varepsilon},$$

其中$\varepsilon>0$任意。故

$$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t.$$

例 4 设$\{x_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$为取值于一距离空间的右连续随机过程，$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，$G$为开集。则首次流入$G$的时间

$$\begin{aligned}\tau_G(\omega)&=\inf\{t: t\geqslant 0,\ x_t(\omega)\in G\},\\&=\infty,\ \text{如对一切}\ t\geqslant 0,\ x_t(\omega)\notin G\end{aligned}$$

为$\{\mathscr{F}_t\}$停时。

实际上，由样本函数的右连续性

$$\begin{aligned}(\tau_G<t)&=(\text{对某}\ s<t,\ x_s\in G)\\&=(\text{对某有理数}\ r<t,\ x_r\in G)\\&=\bigcup_{r\in R,\ r<t}(x_r\in G)\in\mathscr{F}_t,\end{aligned}$$

其中R为非负有理数全体。由引理2知τ_G为$\{\mathscr{F}_t\}$停时。

Ⅰ．基本性质

如不特别声明，以下提到的停时均对同一个σ代数流$\{\mathscr{F}_t\}$而言。

性质1 设τ_1，τ_2为停时，则

$\tau_1+\tau_2$，$\tau_1\vee\tau_2=\max\{\tau_1,\ \tau_2\}$，$\tau_1\wedge\tau_2=\min\{\tau_1,\ \tau_2\}$

都是停时。

证明 令R为非负有理数全体。则

$$(\tau_1\vee\tau_2\leqslant t)=(\tau_1\leqslant t)\cap(\tau_2\leqslant t),$$

$$(\tau_1\wedge\tau_2\leqslant t)=(\tau_1\leqslant t)\cup(\tau_2\leqslant t).$$

$$(\tau_1+\tau_2>t)=(0<\tau_1<t,\ \tau_1+\tau_2>t)$$

$$\cup(\tau_1=0,\tau_2>t)\cup(\tau_1\geqslant t,\ \tau_2>0)\cup(\tau_1>t,\tau_2=0).$$

而
$$(0<\tau_1<t,\ \tau_1+\tau_2>t)$$

$$=\bigcup_{r\in R,\ 0<r<t}\{(r<\tau_1<t)\cap(\tau_2>t-r)\}\in\mathscr{F}_t.$$

$\tau_1+\tau_2$是停时的另一较简单证法见习题8。

性质 2 设τ_1，τ_2，…为一列停时，则

（i）$\sup\limits_{n\geqslant 1}\tau_n$是停时；

（ii）如$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则$\inf\limits_{n\geqslant 1}\tau_n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n$都是停时。

证明 （i）$(\sup\limits_{n\geqslant 1}\tau_n\leqslant t)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\tau_n\leqslant t)\in\mathscr{F}_t$.

(ii) $(\inf\limits_{n\geqslant 1}\tau_n<t)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\tau_n<t)\in\mathscr{F}_t$。因$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n=\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\tau_n$及$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n=\sup\limits_{k\geqslant 1}\inf\limits_{n\geqslant k}\tau_n$，故由(i)，(ii)知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n$及$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tau_n$都是停时。

注意，如$\{\mathscr{F}_t\}$非右连续，结论（ii）未必成立。读者自举一反例。下面我们将研究伴随停时τ的σ代数$\mathscr{F}_\tau$。

定义 3 设τ为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，令

$$\mathscr{F}_\tau=\{A: A\in\mathscr{F}\text{且对每一}t\geqslant 0, A\cap(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t\}. \tag{4}$$

易证$\mathscr{F}_\tau$是σ代数（习题2），$\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_\infty$且如$\tau\equiv t$，则$\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_t$。

若$\{\mathscr{F}_t\}=\{\mathscr{N}_t\}$则上述定义的直观意义可理解为，如已知$(\tau\leqslant t)$，则$A$只依赖于$[0, t]$中运动的进程。

下面两个性质分别为$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$，$s\leqslant t$及$\{\mathscr{F}_t\}$右连续的推广。

性质3 设τ为停时，则

（i）如$\tau_1\leqslant\tau_2$，则$\mathscr{F}_{\tau_1}\subset\mathscr{F}_{\tau_2}$；

（ii）τ为$\mathscr{F}_\tau$可测。

证明 （i）任取$A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$。由定义，对$t\geqslant0$，我们有$A(\tau_1\leqslant t)\in\mathscr{F}_t$。因$\tau_1\leqslant\tau_2$，故

$$A(\tau_2\leqslant t)=[A(\tau_1\leqslant t)]\cap(\tau_2\leqslant t)\in\mathscr{F}_t,$$

可见$A\in\mathscr{F}_{\tau_2}$。

（ii）令$A=(\tau\leqslant s)$，则

$$A\cap(\tau\leqslant t)=(\tau\leqslant t\wedge s)\in\mathscr{F}_{t\wedge s}\subset\mathscr{F}_t.$$

故$A\in\mathscr{F}_\tau$。

性质4 设$\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant\cdots\geqslant\tau_n\geqslant\cdots$为一列$\{\mathscr{F}_t\}$停时，又$\{\mathscr{F}_t\}$右连续。则$\tau=\inf\limits_{n\geqslant1}\tau_n$为停时，且

$$\mathscr{F}_\tau=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n}. \tag{5}$$

证明 τ是停时，性质2已证。往下证（5）。由性质3知$\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$，故$\mathscr{F}_\tau\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n}$。反之，任取$A\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n}$。因$\tau_n\downarrow\tau$，故对任意$t\geqslant0$，有

$$A(\tau\leqslant t)=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{A\left(\tau_k\leqslant t+\frac{1}{m}\right)\right\},$$

但$A\left(\tau_k\leqslant t+\dfrac{1}{m}\right)\in\mathscr{F}_{t+\frac{1}{m}}$，因此

$$A(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t,$$

可见$A\in\mathscr{F}_{\tau}$，故$\mathscr{F}_{\tau}\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n}$。

（二）循序可测过程

定义 4 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为$\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$适应过程，状态空间为$(E,\ \mathscr{B})$。称$\{x_t\}$为**循序可测**的，如对任意$t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$\{(s,\ \omega):0\leqslant s\leqslant t,\ x_t(\omega)\in\Gamma\}\in\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}_t \qquad (6)$$

其中$\mathscr{B}_{[0,t]}$表示$[0,\ t]$中全体Borel集所成的σ代数。

显然，循序可测过程是可测过程。下面是循序可测过程的简单而又重要的例子。

引理 3 设适应过程$\{x_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$的样本函数右连续（或左连续），则$\{x_t\}$为循序可测过程。

证明 设$\{x_t\}$的样本函数右连续。对每一正整数n及$t\geqslant 0$，定义$[0,\ t]\times\Omega$上的函数

$$x_n(0,\ \omega)=x(0,\ \omega)$$

$$x_n(s,\ \omega)=x\left(\frac{kt}{2^n},\ \omega\right),\ 如\frac{(k-1)t}{2^n}<s\leqslant\frac{kt}{2^n},$$

其中$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n$。由于

$$\{(s,\ \omega):0\leqslant s\leqslant t,\ x_n(s,\ \omega)\in\Gamma\}$$

$$=\{0\}\times(x_0(\omega)\in\Gamma)\cup\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\frac{(k-1)t}{2^n},\ \frac{kt}{2^n}\right]$$

$$\times\left(\omega:x\left(\frac{k}{2^n}t,\ \omega\right)\in\Gamma\right)\in\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}_t$$

所以，对每一n，$x_n(s,\ \omega)$是$(s,\ \omega)$的$\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}_t$可测函数。其次，由$x(s,\ \omega)$的右连续性，

$$\lim_{n\to\infty}x_n(s,\ \omega)=x(s,\ \omega),\ (s,\ \omega)\in[0,\ t]\times\Omega,$$

故$x(s,\ \omega)$是$\mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F}_t$可测。

左连续的情况类似可证。

引理 4 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$为循序可测过程，$\tau$是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，则$x_\tau I_{(\tau<\infty)}$为$\mathscr{F}_\tau$可测。

证明 我们须证明，对任意$t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$(x_\tau I_{(\tau<\infty)}\in\Gamma)\cap(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t. \qquad (7)$$

令$\sigma=\tau\wedge t$，由性质 1，σ是$\{\mathscr{F}_t\}$停时。又因

$$\begin{aligned}(x_\tau I_{(\tau<\infty)}\in\Gamma)\cap(\tau\leqslant t) &= (x_\sigma\in\Gamma)\wedge(\sigma\leqslant t)\\ &=(x_\tau I_{(\tau<\infty)}\in\Gamma)\cap\{(\tau<t)\cup(\tau=t)\}\\ &=\{(x_\sigma\in\Gamma)\cap(\sigma<t)\}\cup\{(x_t\in\Gamma)\cap(\tau=t)\}. \qquad (8)\end{aligned}$$

据引理 1 上式右方第二项属于$\mathscr{F}_t$，因此，只要第一项也属于$\mathscr{F}_t$，则（7）得证。为此注意

$\omega\to\sigma(\omega)$ 是$(\Omega,\mathscr{F}_t)\to([0,t],\mathscr{B}_{[0,t]})$的可测变换。故

$\omega\to(\omega,\sigma(\omega))$是$(\Omega,\mathscr{F}_t)\to(\Omega\times[0,t],\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}_{[0,t]})$

的可测变换。又因$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$循序可测，故得知

$(\omega,s)\to x(s,\omega)$是$(\Omega\times[0,t],\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}_{[0,t]})\to(E,\mathscr{B})$

的可测变换，从而其复合变换

$\omega\to x(\sigma(\omega),\omega)$ 为 $(\Omega,\mathscr{F}_t)\to(E,\mathscr{B})$ 的可测变换。

因此

$$(x_\sigma\in\Gamma)\cap(\sigma<t)\in\mathscr{F}_t.$$

记

$$\Omega_\tau=(\omega:\tau(\omega)<\infty).$$

由上可知，只考虑在Ω_τ上，x_τ为$\mathscr{F}_\tau$可测，特别如τ为有限停时，即$\Omega_\tau=\Omega$，则x_τ为$\mathscr{F}_\tau$可测。

（三）齐次强马尔科夫过程

（I）定义

定义 5 称标准齐次马氏过程$\{x_t\}$为（齐次）强马氏过程，如果[1]

---

[1] 作为马氏过程概念的推广，强马氏过程更加自然的定义是把条件（ii）改为，对任一马氏时间τ及$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P_x(x_{\tau+t}\in\Gamma|N_\tau)=p(t,x_\tau,\Gamma)\quad(\text{a.e.}\ \Omega_\tau\ P_x).$$

两种定义是等价的（习题12）。

（i）$\{x_t, \mathscr{N}_t\}$循序可测；

（ii）对任意马氏时间τ及有界$\mathscr{B}$可测函数$f(x)$，$x\in E$，有

$$E_x[f(x_{\tau+t})|\mathscr{N}_\tau]=E_{x_\tau}f(x_t)\quad(\text{a.e.}\ \Omega_\tau\cdot P_x). \tag{9}$$

条件（9）称为**强马尔科夫性**。

对（9）式的几点说明：

1．因为x_t只对$0\leqslant t<\infty$有定义，故（9）只在Ω_τ上有定义；

2．由$\Omega_\tau\in\mathscr{N}_\tau\subset\mathscr{N}$及引理4可知，只考虑在$\Omega_\tau$上，$f(x_{\tau+t})$为$\mathscr{N}_{\tau+t}\subset\mathscr{N}$可测。又因$E_xf(x_t)$为$\mathscr{B}$可测（§4.3习题13），故（9）有意义；

3．条件（9）等价于要求在Ω_τ上$E_{x_\tau}f(x_t)$为$\mathscr{N}_\tau$可测，且对任一$A\in\mathscr{N}_\tau$有

$$\int_{A\Omega_\tau}f(x_{\tau+t})P_x(d\omega)=\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}f(x_t)P_x(d\omega);$$

4．符号（a.e. $\Omega_\tau\cdot P_x$）表示（9）式在Ω_τ上关于测度P_x几乎处处成立，亦即至多在某集$N=N_x\subset\Omega_\tau$上（9）不成立，其中$P_x(N)=0$。

例1 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为离散参数标准齐次马氏过程。则$\{x_n\}$是强马氏过程。从而齐次马氏链是强马氏过程。

实际上，$\{x_n\}$的样本函数右连续（离散拓扑意义下），故循序可测。从而由上面的说明$E_{x_\tau}f(x_t)$在Ω_τ上是$\mathscr{N}_\tau$可测。其次，设τ为马氏时间，值域为$\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$。任取$A\in\mathscr{N}_\tau$，令

$$A_k=A(\tau=k),\quad k=0, 1, 2, \cdots,$$

则

$$\int_{A\Omega_\tau}f(x_{\tau+n})P_x(d\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k}f(x_{k+n})P_x(d\omega).$$

因为$A_k=A(\tau\leqslant k)(\tau=k)\in\mathscr{N}_k$，由马氏性上式右方等于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} E_{x_k} f(x_n) P_x(d\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} E_{x_\tau} f(x_n) P_x(d\omega)$$

$$= \int_{A\Omega_\tau} E_{x_\tau} f(x_n) P_x(d\omega).$$

可见$\{x_n\}$满足强马氏性条件.

例 2 Wiener过程是强马氏过程。这由下面的定理即知. 此定理给出强马氏性成立的一个充分条件.

定理1 右连续Feller过程$\{x_t, \ t\geqslant 0\}$是强马氏过程.

证明 由引理 3 知$\{x_t\}$循序可测，从而如同例 1 所述$E_{x_\tau} f(x_t)$在Ω_τ上为$\mathscr{N}_\tau$可测，其中$f(x)$为有界$\mathscr{B}$可测函数. 往下证强马氏性成立。分三步证之。

第一步，对任意有界连续函数$f(x)$及只取可列多个值的马氏时间τ，有

$$E_x[f(x_{\tau+t})|\mathscr{N}_\tau] = E_{x_\tau} f(x_t) \qquad (\text{a. e. } \Omega_\tau \cdot P_x). \qquad (10)$$

其证明与例 1 完全相同。

第二步，证明（10）对任意的马氏时间仍成立。

实际上，定义

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2^n}, & \text{如} \dfrac{k}{2^n} \leqslant \tau(\omega) < \dfrac{k+1}{2^n}, \\ \infty, & \text{如} \tau(\omega) = \infty, \end{cases}$$

则τ_n是马氏时间。这是因为对任意$t\geqslant 0$，可选取k使$\dfrac{k}{2^n}\leqslant t<\dfrac{k+1}{2^n}$. 于是

$$(\tau_n \leqslant t) = \left(\tau < \frac{k}{2^n}\right) \in \mathscr{N}_{\frac{k}{2^n}} \subset \mathscr{N}_t.$$

由τ_n的定义知$\tau_n\geqslant\tau$，$\tau_n\downarrow\tau$且τ_n只取可列多个值。于是由x_t的右连续性得知，在Ω_τ上

$$\lim_{n\to\infty} x(\tau_n + t) = x(\tau + t), \quad t \geqslant 0. \qquad (11)$$

所以，对任一$A\in\mathscr{N}_\tau$，有

$$\int_{A\Omega_\tau} f\{x(\tau+t)\}P_x(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_{A\Omega_\tau} f\{x(\tau_n$$

$$+t)\}P_x(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_{A\Omega_\tau} E_{x_{\tau_n}}f(x_t)P_x(d\omega)$$

$$=\int_{A\Omega_\tau} E_{x_\tau}f(x_t)P_x(d\omega).$$

上式第二个等号是因$\tau\leqslant\tau_n$，故由性质3知$A\in\mathscr{N}_{\tau_n}$及(10)。最后一个等号是因$\{x_t\}$为Feller过程，故$E_xf(x_t)=T_tf(x)$是x的连续函数及(11)。

第三步，令

$\mathscr{L}$={定义在E上的有界$\mathscr{B}$可测函数全体}，

$L=\{f:f$使（10）成立的$\mathscr{B}$可测函数，其中τ为任意马氏时间$\}$。

易证L是$\mathscr{L}$-系。据第二步所证L包含一切有界连续函数，故据附录（一）定理5，$L\supset\mathscr{L}$，定理证毕。

（Ⅱ）强马氏性的等价形式

设$\{x_t,\ t\geqslant0\}$为强马氏过程，τ为马氏时间。在Ω_τ上定义推移算子θ_τ如下：

对任一$\omega\in\Omega_\tau$，令

$$\theta_\tau\omega=\theta_t\omega,\ \text{如}\ \tau(\omega)=t; \tag{12}$$

或等价地，对一切$s\geqslant0$，有

$$x_s(\theta_\tau\omega)=x_{s+\tau(\omega)}(\omega), \tag{13}$$

特别，当$\tau\equiv t$时我们有$\theta_\tau=\theta_t$。

对$A\in\mathscr{N}$，定义

$$\theta_\tau^{-1}A=(\omega:\omega\in\Omega_\tau,\ \theta_\tau\omega\in A). \tag{14}$$

对$\mathscr{N}$可测函数$\eta(\omega)$，定义

$$\theta_\tau\eta(\omega)=\eta(\theta_\tau\omega),\ \omega\in\Omega_\tau. \tag{15}$$

由§4.3，（五）的讨论，我们总可以假定θ_τ存在。

性质1 （a）$\theta_\tau^{-1}\Omega=\Omega_\tau$；

（b）对任意A，$B\in\mathscr{N}$，$A\supset B$，有

$$\theta_\tau^{-1}(A-B)=\theta_\tau^{-1}A-\theta_\tau^{-1}B;$$

（c）对任意$A_\alpha\in\mathscr{N}$，$\bigcup_\alpha A_\alpha\in\mathscr{N}$，$\bigcap_\alpha A_\alpha\in\mathscr{N}$，有

$$\theta_\tau^{-1}\left\{\bigcup_\alpha A_\alpha\right\}=\bigcup_\alpha\theta_\tau^{-1}A_\alpha,$$

$$\theta_\tau^{-1}\left\{\bigcap_\alpha A_\alpha\right\}=\bigcap_\alpha\theta_\tau^{-1}A_\alpha.$$

性质2 （a）$\theta_\tau^{-1}(x_t\in\Gamma)=(x_{\tau+t}\in\Gamma)$；

（b）$\theta_\tau^{-1}I_A=I_{\theta_\tau^{-1}A}$，$A\in\mathscr{N}$。

性质1与性质2的证明可根据定义得到，留作习题。

定理2 设$\{x_t\}$为循序可测的标准齐次马氏过程，则下列诸条件等价：

（a）对任意马氏时间τ及有界$\mathscr{B}$可测函数$f(x)$，$x\in E$，有

$$E_x[f(x_{\tau+t})|\mathscr{N}_\tau]=E_{x_\tau}f(x_t)\quad(\text{a.e.}\ \Omega_\tau\cdot P_x); \tag{16}$$

（b）对任意马氏时间τ及$A\in\mathscr{N}$，有

$$P_x(\theta_\tau^{-1}A|\mathscr{N}_\tau)=P_{x_\tau}(A)\quad(\text{a.e.}\ \Omega_\tau\cdot P_x); \tag{17}$$

（c）对任意马氏时间τ，任意有界$\mathscr{N}$可测的$\eta(\omega)$及有界$\mathscr{N}_\tau$可测的$\xi(\omega)$。只考虑在Ω_τ上有

$$E_x\{\xi\theta_\tau\eta\}I_{\Omega_\tau}=E_x\{\xi E_{x_\tau}\eta\}I_{\Omega_\tau}; \tag{18}$$

（d）对任意马氏时间τ及有界$\mathscr{N}$可测的$\eta(\omega)$，有

$$E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{N}_\tau)=E_{x_\tau}\eta\quad(\text{a.e.}\ \Omega_\tau\cdot P_x). \tag{19}$$

证明 证明思路如下

$$(a)\to(d)\to(c)\to(b)\to(a).$$

（a）⇒（d） 用$\mathscr{L}$-系法只需证明（19）对$\eta=I_A$，$A\in\mathscr{N}$

成立即可。为此，应用λ-系法，只需考虑$A=(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)$，$t_i\geqslant 0$，$n\geqslant 1$的情形。令$f_i(x)$，$x\in E$，$i=1,2,\cdots,n$，为有界$\mathscr{B}$可测函数，$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$。我们证明

$$E_x[f_1(x_{\tau+t_1})\cdots f_n(x_{\tau+t_n})|\mathscr{N}_\tau]$$
$$=E_{x_\tau}[f_1(x_{t_1})\cdots f_n(x_{t_n})] \quad (\text{a. e. } \Omega_\tau\cdot P_x). \qquad (20)$$

实际上，由引理4及§4.3习题13知，在Ω_τ上(20)右方是$\mathscr{N}_\tau$可测。往下证明对任一$A\in\mathscr{N}_\tau$

$$\int_{A\Omega_\tau}\prod_{i=1}^n f_i(x_{\tau+t_i})P_x(d\omega)$$
$$=\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^n f_i(x_{t_i})\right]P_x(d\omega). \qquad (21)$$

用归纳法证之，当$n=1$时由(16)知(21)成立。今设(21)对$n-1$成立。令

$$\sigma=\tau+t_{n-1},$$

则σ是马氏时间，$\Omega_\sigma=\Omega_\tau$且$\mathscr{N}_\tau\subset\mathscr{N}_\sigma$。因为

$$\prod_{i=1}^n f_i(x_{\tau+t_i})=\prod_{i=1}^{n-1}f_i(x_{\tau+t_i})\cdot f_n(x_{\sigma+t_n-t_{n-1}})$$

而$\prod_{i=1}^{n-1}f_i(x_{\tau+t_i})$在$\Omega_\sigma$上为有界$\mathscr{N}_\sigma$可测，故由强马氏性(16)得

$$E_x\left[\prod_{i=1}^n f_i(x_{\tau+t_i})|\mathscr{N}_\sigma\right]$$
$$=\prod_{i=1}^{n-1}f_i(x_{\tau+t_i})E_x[f_n(x_{\sigma+t_n-t_{n-1}})|\mathscr{N}_\sigma]$$
$$=\prod_{i=1}^{n-1}f_i(x_{\tau+t_i})E_{x_\sigma}[f_n(x_{t_n-t_{n-1}})] \quad (\text{a. e. } \Omega_\sigma\cdot P_x). \qquad (22)$$

令

$$g_k=f_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2,$$
$$g_{n-1}(x)=f_{n-1}(x)E_xf_n(x_{t_n-t_{n-1}}).$$

于是（22）右方可写成

$$\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_{\tau+t_i})E_{x_\sigma}[f_n(x_{t_n-t_{n-1}})]=\prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_{\tau+t_i}).\qquad(23)$$

因此，对任一$A\in\mathscr{N}_\tau$，因$A\in\mathscr{N}_\sigma$，故由（22），（23）得

$$\int_{A\Omega_\tau}\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{\tau+t_i})P_x(d\omega)=\int_{A\Omega_\tau}\prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_{\tau+t_i})P_x(d\omega).$$

$$(24)$$

根据归纳法假设，上式右方等于

$$\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_{t_i})\right]P_x(d\omega)=\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^{n-2} f_i(x_{t_i})\right.$$
$$\left.\cdot f_{n-1}(x_{t_{n-1}})E_{x t_{n-1}}f_n(x_{t_n-t_{n-1}})\right]P_x(d\omega).\qquad(25)$$

由齐次马氏性，被积函数等于

$$E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_{t_i})E_x\{f_n(x_{t_n})|\mathscr{N}_{t_{n-1}}\}\right]$$
$$=E_{x_\tau}\left[E_x\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{t_i})|\mathscr{N}_{t_{n-1}}\right\}\right]=E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{t_i})\right].$$

$$(26)$$

由（24）—(26）我们得

$$\int_{A\Omega_\tau}\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{\tau+t_i})P_x(d\omega)$$
$$=\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{t_i})\right]P_x(d\omega).$$

（21）得证。

(d)⇒(c) $E_x[\xi\theta_t\eta]=E_x[E_x(\xi\theta_t\eta|\mathscr{N}_t)]$
$$=E_x[\xi E_x(\theta_t\eta|\mathscr{N}_t)]$$
$$=E_x[\xi E_{x_t}\eta]。$$

(c)⇒(b) 任取$B\in\mathscr{N}_T$。令$\xi=I_{B\Omega}$，$\eta=I_A$。代入(18)得(17)。

(b)⇒(a) 令

$$\mathscr{L}=\{\eta:\eta(\omega)\text{有界函数}\},$$
$$L=\{\eta:\eta(\omega)\text{满足(19)式}\}。$$

则L是$\mathscr{L}$-系。由(17)对任一$A\in\mathscr{N}$知$I_A\in L$。于是L包含一切有界$\mathscr{N}$可测的$\eta(\omega)$。特别令$\eta=f(x_t)$即得(16)。定理证毕。

§4.5 马尔科夫过程样本函数的连续性

引理 设$\{x_t, t\geqslant 0\}$为可分过程，如$\{x_t\}$可测且对任一$\varepsilon>0$及实数M

$$P(|x_t-x_{t+h}|\geqslant\varepsilon)=o(h),\tag{1}$$

对$t\in[0,M]$一致成立，则

$P(\omega:x(t,\omega)$在$[0,\infty)$中有不连续点且它是跳跃点$)=0$。

证明 固定M，对$\varepsilon>0$令

$$A_h=\{(t,\omega):t\in[0,M],|x_t(\omega)-x_{t+h}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}。\tag{2}$$

由$\{x_t\}$的可测性知$A_h\in\overline{\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{F}}$。据Fubini定理及(1)，我们有

$$L\times P(A_h)=\int_0^M P(\omega:(t,\omega)\in A_h)dt=o(h)\tag{3}$$

及

$$L\times P(A_h)=E\{L(t:(t,\omega)\in A_h)\}$$
$$=E\{L(A_h(\omega))\},$$

其中L为勒贝格测度，$A_h^{(\omega)}$为A_h的ω截口。于是由(3)

$$E\{L(A_h(\omega))\}=o(h). \tag{4}$$

今设$x(t, \omega)$在$t_0\in[0, M]$点不连续且t_0是跳跃点，亦即$x(t, \omega)$在t_0的左、右极限x_{t_0-}及x_{t_0+}存在但不相等。设

$$|x_{t_0-}(\omega)-x_{t_0+}(\omega)|\geqslant 2\varepsilon. \tag{5}$$

因对充分大的n，有

$$\left.\begin{aligned}&|x_{t_0-}(\omega)-x_t(\omega)|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in\left(t_0-\frac{1}{n}, t_0\right),\\ &|x_{t_0+}(\omega)-x_t(\omega)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in\left(t_0, t_0+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

故由（5），（6）得

$$|x_t(\omega)-x_{t+\frac{1}{n}}(\omega)|\geqslant \varepsilon,$$

$$t\in\left(t_0-\frac{1}{n}, t_0\right). \tag{7}$$

注意，如$t_0=0$，（7）就改为

$$|x_0(\omega)-x_t(\omega)|\geqslant \varepsilon, \qquad t\in\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

总之，如ω使（5）成立，则对此ω存在充分大的$n=n(\omega)$，使

$$L\left\{A_{\frac{1}{n}}(\omega)\right\}\geqslant\frac{1}{n}. \tag{8}$$

因此，如存在集

$$B=(\omega: x(t, \omega) \text{ 在}[0, M]\text{有跳跃点且跃度}\geqslant 2\varepsilon)$$

又$P(B)>0$，则因$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\omega: L\left(A_{\frac{1}{n}}(\omega)\right)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$，故必存在$n$，使

$$P\left\{\omega: L\left(A_{\frac{1}{n}}(\omega)\right)\geqslant\frac{1}{n}\right\}=\delta>0, \tag{9}$$

从而

$$E\left[L\left(A_{\frac{1}{n}}(\omega)\right)\right] \geqslant \frac{\delta}{n}.$$

这与（4）矛盾，故$P(B)=0$。由M及ε的任意性即知引理成立。

定理 设$\{x_t, t\geqslant 0\}$为标准齐次马氏过程，转移函数为$P(t, x, \Gamma)$。如$\{x_t\}$右连续且对任$\varepsilon>0$，当$h\to 0$时

$$p(h, x, E-N_\varepsilon(x))=o(h) \tag{10}$$

对$x\in E$一致成立，其中$N_\varepsilon(x)=(y:|x-y|<\varepsilon)$，则对一切$x$

$$P_x(\omega: x(t, \omega)\text{在}[0, \infty)\text{上连续})=1. \tag{11}$$

证明 由假设$\{x_t\}$可分且可测。由（10）

$$P_x(|x_t-x_{t+h}|\geqslant\varepsilon)=\int_E p(t, x, dy)p(h, y, E-N_\varepsilon(y))=o(h),$$

因$\{x_t\}$右连续，它的不连续点只能是跳跃点，因此，由引理知（11）成立。

习　题

1. 证明τ为$\{\mathscr{F}_t\}$宽停时的充要条件为τ是$\{\mathscr{F}_{t+}\}$停时。
2. 设τ为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，证明$\mathscr{F}_\tau$是σ代数。
3. 设τ和σ为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，证明

（i）$\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma=\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$；

（ii）$\mathscr{F}_{\tau\vee\sigma}=\mathscr{F}_\tau\vee\mathscr{F}_\sigma=\sigma\{A\cup B: A\in\mathscr{F}_\tau, B\in\mathscr{F}_\sigma, AB=\phi\}$.

其中符号$\mathscr{F}_\tau\vee\mathscr{F}_\sigma$表示包含$\mathscr{F}_\tau$和$\mathscr{F}_\sigma$的最小$\sigma$代数。

4. 假设同上。证明（$\tau\leqslant\sigma$），（$\tau<\sigma$），（$\tau=\sigma$）都属于$\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$。
5. 假设同上。证明对任一可积随机变量ξ，有

（i）$E(I_{(\sigma>\tau)}\xi|\mathscr{F}_\tau)=I_{(\sigma>\tau)}E(\xi|\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau})$a.e.；

（ii）$E(I_{(\sigma\geqslant\tau)}\xi|\mathscr{F}_\tau)=I_{(\sigma\geqslant\tau)}E(\xi|\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau})$a.e.；

（iii）$E[E(\xi|\mathscr{F}_\tau)|\mathscr{F}_\sigma]=E(\xi|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})$a.e.。

6. 假设同上。证明如$\xi(\omega)$为$\mathscr{F}_{\tau\vee\sigma}$可测，则

(i) $\xi I_{(\sigma\geq\tau)}$, $\xi I_{(\sigma>\tau)}$ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测；

(ii) $\xi I_{(\sigma=\tau)}$ 为 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$ 可测。

7. 假设同上。证明

(i) $(\tau\leqslant\sigma)\cap\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}=(\tau\leqslant\sigma)\cap\mathscr{F}_\sigma$；

(ii) $(\tau\leqslant\sigma)\cap\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}=(\tau\leqslant\sigma)\cap\mathscr{F}_\tau$；

(iii) $(\tau=\sigma)\cap\mathscr{F}_{\tau\vee\sigma}=(\tau=\sigma)\cap\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}=(\tau=\sigma)\cap\mathscr{F}_\tau$

$$=(\tau=\sigma)\cap\mathscr{F}_\sigma.$$

8. 设 τ 为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，σ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测函数（可取 $+\infty$）且 $\tau\leqslant\sigma$。证明 σ 为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。利用此结果证明，如 τ_1，τ_2 为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，则 $\tau_1+\tau_2$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。

9. 设适应过程 $\{x_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant0\}$ 的状态空间 $(E,\mathscr{B})$ 为距离可测空间，$\mathscr{B}$ 为包含一切开集的最小 σ 代数，G 为开集。试证 如 $\{x_t\}$ 连续，则首次流出 G 的时间

$$\begin{aligned}\tau&=\inf\{t:x_t\notin G\},\\&=\infty,\ \text{如对一切}\ t,\ x_t\in G\end{aligned}$$

为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。

10. 设 $\{x_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant0\}$ 同上题，F 为闭集且 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续。试证 如 $\{x_t\}$ 右连续，则

$$\begin{aligned}\tau&=\inf\{t:x_t\notin F\}\\&=\infty,\ \text{如对一切}\ t,\ x_t\in F\end{aligned}$$

为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时。

11. 设 $\{x_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant0\}$ 为适应过程，状态空间与第 9 题同且每一样本函数右连续。试证如 $\{x_t\}$ 拟左连续（亦即对任意上升的 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时序列 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots$，$\tau_n\uparrow\tau$，在 Ω_τ 上有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{\tau_n}=x_\tau$），则对任意开集 G，

$$\tau_G=\inf\{t:x_t\notin G\}$$

为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 宽停时。

12. 证明标准齐次马氏过程 $\{x_t\}$ 为强马氏过程的充要条件为

(i) $\{x_t\}$ 循序可测；

(ii) 对任意马氏时间 τ

$$P_x(x_{\tau+t}\in\Gamma|\mathscr{N}_\tau)=p(t,x_\tau,\Gamma)\quad(\text{a. e.}\ \Omega_\tau,\ P_x),$$

其中 $p(t,x,\Gamma)$ 为 $\{x_t\}$ 的转移函数。

13. 证明右连续标准齐次马氏过程的转移函数 $p(t, x, \Gamma)$ 是随机连续的，亦即对任一 x 及任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to 0+} p(t, x, N_\varepsilon(x)) = 1,$$

其中 $N_\varepsilon(x)=(y: |x-y|<\varepsilon)$。

14. 设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为标准齐次马氏过程，如 $\{x_t\}$ 右连续且是 Feller 过程，证明 $\{x_t, \mathscr{N}_{t+}, t\geqslant 0\}$ 也是标准齐次马氏过程。

15. 设 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 为齐次马氏链，其 k 步转移概率为 $p_{ij}^{(k)}$，τ 为马氏时间且 $\tau<\infty$。令

$$y_n = x_{\tau+n}, \quad n\geqslant 0,$$

证明 $\{y_n\}$ 也是齐次马氏链，而且对任意 $0=n_0<n_1<\cdots n_m$，有

$$P(y_{n_k}=i_k, 0\leqslant k\leqslant m) = P(y_0=i_0)\prod_{k=0}^{m-1} p_{i_k, i_{k+1}}^{(n_{k+1}-n_k)}.$$

16. 设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为Wiener过程，τ 是有限马氏时间且只取可列多个值，令

$$y_t = x_{\tau+t} - x_\tau, \quad t\geqslant 0.$$

证明 $\{y_t\}$ 是Wiener过程。

17. 试证第15题对任意马氏时间 $\tau<\infty$ 也成立。

18. 设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为标准齐次马氏过程，每一样本函数右连续。如果对任一有界连续函数 $f(y)$，$y\in R_1$ 及实数 $\lambda>0$

$$E_{x_t}\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(x_s)\, ds, \quad t\geqslant 0$$

是 t 的右连续函数，证明

（i）对任意马氏时间 τ 及有界连续函数 $f(y)$

$$\int_{\Omega_\tau} f(x_{\tau+s}) P_x(d\omega) = \int_{\Omega_\tau} E_{x_\tau} f(x_s) P_x(d\omega), \quad s\geqslant 0,$$

（ii）$\{x_t\}$ 为强马氏过程。

提示 令

$$\tau_n = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2^n}, & \dfrac{k}{2^n}\leqslant \tau < \dfrac{k+1}{2^n}, \\ \infty, & \tau=\infty. \end{cases}$$

则 $x(\tau_n+t)\longrightarrow x(\tau+t)$，$n\to\infty$，记

$$R_\lambda f(x_t)=E_{x t}\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}f(x_t)\,ds.$$

证明 $E_x I_{\Omega_\tau}\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}f(x_{\tau+s})\,ds=\lim\limits_{n\to\infty}E_x I_{\Omega_\tau}\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}f(x_{\tau_n+s})\,ds$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_\tau}R_\lambda f(x_{\tau_n})P_x(d\omega)$$

$$=\int_{\Omega_\tau}R_\lambda f(x_\tau)\ P_x(d\omega),$$

交换积分符号利用Lap Lace 变换的唯一性即得（i）。再对$A\in\mathscr{N}_\tau$定义马氏时间

$$\tau_A(\omega)=\begin{cases}\tau(\omega), & \omega\in A,\\ \infty, & \omega\notin A.\end{cases}$$

由（i）证明$\int_{A\Omega_\tau}f(x_{\tau+s})P_x(d\omega)=\int_{\Omega_{\tau_A}}f(x_{\tau_A+s})P_x(d\omega)$

$$=\int_{A\Omega_\tau}E_{x_\tau}f(x_s)P_x(d\omega).$$

再应用$\mathscr{L}$-系法证明强马氏性成立。

19. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为连续的强马氏过程，令

$$\tau_x=\inf\{t:t\geqslant 0,\ x_t=x\},$$
$$=\infty,\ \text{如一切}\ t\ \text{有}\ x_t\neq x.$$

证明

（i）τ_x为马氏时间；

(ii) 如$a<x<y<b$，则

$$P_y(\tau_a<\infty)=P_y(\tau_x<\infty)P_x(\tau_a<\infty).$$

20. 假设同上。又设对某$a<b$有$P_a(\tau_b<\infty)>0$。证明

（i）对任一$x\in(a,b)$有

$$P_a(\tau_b\leqslant b)\leqslant P_x(\tau_b\leqslant t);$$

(ii) 对一切$x\in(a,b)$有$E_x\tau_{(a,b)}<\infty$,其中

$$\tau_{(a,b)}=\inf\{t:t\geqslant 0,\ x_t=a\ \text{或}\ b\}.$$

*21. 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为右连续的标准齐次马氏过程，其状态空间为紧距离可测空间（$E\cdot\mathscr{B}$），其中$\mathscr{B}$为包含一切开集的最小σ代数。如果对任

一$\varepsilon>0$及$x\in E$，存在非负连续函数$f(y)$，$y\in E$，使得

(i) 当$y\in N_\varepsilon(x)=\{y: \rho(x, y)<\varepsilon\}$时，$f(y)>0$，其中$\rho(\cdot,\cdot)$为$E$中的距离；

(ii) 存在x的一邻域G，使当$y\in G$时$f(y)=0$且

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\int_E f(y)p(t, z, dy)-f(z)}{t}=0$$

对$z\in G$一致成立，其中$p(t, y, \Gamma)$为$\{x_t\}$的转移函数，证明对一切x有

$$P_x(\omega: x(t, \omega) \text{ 在}[0, \infty)\text{上连续})=1.$$

提示 验证§4.5定理的条件成立。

第五章　鞅　　论

早在本世纪三十年代末至五十年代初，著名数学家J. L. Doob和P. Lévy就创立了鞅论．这个理论发展到现在不仅成了随机过程理论中最活跃和最富于成果的分支之一，而且还愈来愈广泛地被应用于马氏过程、点过程、估计理论、随机控制等理论分支及应用领域．在这一章里，我们主要介绍经典鞅论的基本概念和性质，并给出一些被应用于马氏过程的例子．

§5.1　定义及简单性质

设已给概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及参数集T．如不特别声明，在离散情形，$T=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，在连续情形，$T=[0, \infty)$．并记$\bar{T}=T\cup\{\infty\}$，它表示T的单点紧化．$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$是$\mathscr{F}$的子σ代数流．

（一）定义

定义1　称实值随机过程$X=\{x_t, t\in T\}$为$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$**鞅**（Martingale），如果

（a）X是$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$适应的；

（b）$E|x_t|<\infty$，$t\in T$；

（c）对任意$s<t$，s，$t\in T$，$E(x_t|\mathscr{F}_s)=x_s$ a. e.

称X是$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$**上鞅**（Supermartingale），如果条件（c）改为

$$E(x_t|\mathscr{F}_s)\leqslant x_s\quad \text{a. e.},$$

称X是$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$**下鞅**（Submartingale），如果条件（c）改为

$$E(x_t|\mathscr{F}_s)\geqslant x_s\quad \text{a. e.}$$

上鞅和下鞅统称为**半鞅**．为简单起见，当$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$取定后，如不引起混淆，我们就把鞅（半鞅）$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$简记成$X$或

$\{x_t\}$。

由定义立知，如X是上鞅，则$-X$是下鞅，如X是上鞅又是下鞅，则X是鞅。其次，由（c）可知，如X是鞅则对任意s，$t\in T$，

$$Ex_t=Ex_s;$$

如X是上鞅则对任意$s<t$，s，$t\in T$，

$$Ex_t\leqslant Ex_s;$$

如X是下鞅则对任意$s<t$，s，$t\in T$，

$$Ex_t\geqslant Ex_s。$$

以下出现的有关条件期望的等式、不等式都指a.e.成立。

（二）例

例1 设$\{y_n,\ n\geqslant 0\}$为相互独立的随机变量，具有$E|y_n|<\infty$，$Ey_n=0$，$n\geqslant 0$。g_k是k元Borel可测函数。令

$$b_n=g_n(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-1}),\quad n\geqslant 1,$$

并假定$E|b_n|<\infty$，$n\geqslant 1$。定义

$$x_n=x_0+\sum_{k=1}^{n}b_ky_k,\quad \text{其中}x_0\text{为常量,}$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n),\quad n\geqslant 1,$$

则$\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant 1\}$是鞅。实际上，由于，$E|b_k|<\infty$，$E|y_k|<\infty$，$k\geqslant 1$及$x_0$是常数，这推出$E|x_n|<\infty$，$n\geqslant 1$。又

$$x_{n+1}=x_n+b_{n+1}y_{n+1},\quad n\geqslant 1,$$

$$\begin{aligned}E(x_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=E(x_n|\mathscr{F}_n)+E(b_{n+1}y_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=x_n+b_{n+1}E(y_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=x_n+b_{n+1}Ey_{n+1}\\&=x_n。\end{aligned}\tag{1}$$

上式中第三个等号成立是由于y_{n+1}与$\mathscr{F}_n$独立。事实上，当T离散时，定义1中的（c）与（1）式等价，这个结论留作习题让读者自证。

此例的直观意思为：设赌徒甲每局赌赢的概率为 $\frac{1}{2}$，事件$\{y_n=1\}$表示第n局甲赢，$\{y_n=-1\}$表示第n局甲输。于是我们有$P(y_n=1)=P(y_n=-1)=\frac{1}{2}$，从而$Ey_n=0$。假定$\{y_n\}$是独立序列，今设赌徒甲不断地变换其赌策，第$n$局的赌策$g_n$依赖于前$n-1$局的战绩。根据选定的赌策，他所下的赌注为$b_n$。如甲的初始赌本为$x_0\geqslant 0$，则在第$n$局结束时甲的资本即为$x_n$。但由（1）知

$$E(x_{n+1}-x_n)=0,$$

故甲的赌策不会给他带来净利。由此可见，当赌徒每局胜负的机会均等，而其赌策只依赖于前几局的结果时，此赌博将是公平赌博。所谓"公平"意指赌徒在下一局结束的资本，平均说来等于他现有的资本，而与以前几次的赌局无关。

例 2 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$是马氏过程，它的相空间是$(R_1,\mathscr{B})$，转移函数是$P(t,\ x,\ A)$，$t\geqslant 0$，$x\in R_1$，$A\in\mathscr{B}$。设$f(x)$，$x\in R_1$是有界$\mathscr{B}$可测函数，且满足：对任意$x\in R_1$，$t\geqslant 0$，

$$f(x)=T_tf(x). \tag{2}$$

令$y_t=f(x_t)$，$\mathscr{F}_t=\sigma(x_s,\ s\leqslant t)$，$t\geqslant 0$，则$\{y_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$是鞅。实际上，因$f$有界，故$E|y_t|<\infty$，$t\geqslant 0$。其次，由马氏性，对$t>s$有

$$\begin{aligned}E(y_t|\mathscr{F}_s)&=E(f(x_t)|\mathscr{F}_s)\\&=E_{x(s)}f(x_{t-s})\\&=T_{t-s}f(x_s).\end{aligned}$$

由（2）上式右方等于$f(x_s)$即为y_s。

此例是由马氏过程构造鞅的一个例子。

例 3 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程且是标准马氏过程。令$\mathscr{N}_t=\sigma(x_s,\ s\leqslant t)$，则

（i）$\{x_t,\ \mathscr{N}_t,\ t\geqslant 0\}$；

（ii）$\{x_t^2-t,\ \mathscr{N}_t,\ t\geqslant 0\}$；

(iii) $\left\{e^{\lambda x_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathscr{N}_t, \quad t \geqslant 0\right\}$，其中λ是任意固定的实数。

上述三个过程关于概率测度P_x，$x \in R_1$是鞅。

我们只对（ii）证明，其余两个留作习题。

令$y_t = x_t^2 - t$，因x_t关于P_x是$\mathscr{N}(x, \sqrt{t})$分布，故$E|y_t| < \infty$，$t \geqslant 0$是显然的。对$s < t$，有

$$y_t = y_s + (x_t - x_s)^2 + 2x_s(x_t - x_s) - (t - s)$$

注意到，$(x_t - x_s)$与$\mathscr{N}_s$独立，$E_x(x_t - x_s)^2 = t - s$及$E_x x_t = x$得到

$$\begin{aligned}E_x(y_t|\mathscr{N}_s) &= y_s + E_x((x_t - x_s)^2|\mathscr{N}_s) + 2E_x(x_s(x_t - x_s)|\mathscr{N}_s) \\ &\quad - (t - s) \\ &= y_s + E_x(x_t - x_s)^2 + 2x_s E_x(x_t - x_s) - (t - s) \\ &= y_s + (t - s) - (t - s) = y_s.\end{aligned}$$

因此得证$\{y_t, \mathscr{N}_t, \quad t \geqslant 0\}$关于$P_x$是鞅。

对于d维标准 Wiener 过程也有相应的结果，可参看[2]或[3]。

例 4 Doob的鞅过程。

设$\{y_n, \quad n \geqslant 0\}$是随机变量序列，$X$是随机变数，$E|X| < \infty$，令$\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n)$，

$$x_n = E(X|\mathscr{F}_n),$$

则$\{x_n, \mathscr{F}_n, \quad n \geqslant 1\}$是鞅，它被称为Doob的鞅过程。

首先，

$$\begin{aligned}E|x_n| &= E\{|E(X|\mathscr{F}_n)|\} \\ &\leqslant E\{E(|X||\mathscr{F}_n)\} \\ &= E|X| < \infty,\end{aligned}$$

其次，

$$\begin{aligned}E(x_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E\{E(X|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n\} \\ &= E(X|\mathscr{F}_n) = x_n,\end{aligned}$$

故$\{x_n, \mathscr{F}_n, \quad n \geqslant 1\}$是鞅。

还有许多重要的例子，在此不再一一列举，可参阅[3]或

〔4〕。

（三）简单性质

定理1 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$和$\{y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是鞅（或下鞅），则

（a）$\{x_t+y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是鞅（或下鞅）；

（b）$\{x_t\vee y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是下鞅。

证明 （a）x_t+y_t的$\mathscr{F}_t$适应性及可积性是显然的。以下只需验证定义1中的条件（c），对任意$s<t$，$s, t\in T$，

$$E(x_t+y_t|\mathscr{F}_s)=E(x_t|\mathscr{F}_s)+E(y_t|\mathscr{F}_s)$$
$$=x_s+y_s(\geqslant x_s+y_s)。$$

（b）因$x_t\vee y_t\geqslant x_t$，

$$x_t\vee y_t\geqslant y_t,$$

故有$E(x_t\vee y_t|\mathscr{F}_s)\geqslant E(x_t|\mathscr{F}_s)\vee E(y_t|\mathscr{F}_s)$

$$\geqslant x_s\vee y_s。$$

由定理1（b）知，如$\{x_t\}$与$\{y_t\}$是上鞅，则$\{x_t\wedge y_t\}$也是上鞅。

下面的定理指出，如何由半鞅（或鞅）构造出新的半鞅。

定理2 （1）设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是鞅，$f$是定义在$R_1$上的凸函数。如对一切$t\in T$，$E|f(x_t)|<\infty$，则$\{f(x_t), \mathscr{F}_t, t\in T\}$是下鞅。

（2）设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是下鞅，$f$是定义在$R_1$上的非降凸函数。如对一切$t\in T$，$E|f(x_t)|<\infty$，则$\{f(x_t), \mathscr{F}_t, t\in T\}$是下鞅。

（3）设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是上鞅，$f$是定义在$R_1$上的非降凹函数。如对一切$t\in T$，$E|f(x_t)|<\infty$，则$\{f(x_t), \mathscr{F}_t, t\in T\}$是上鞅。

我们只给出（2）的证明，其余留作习题。

证明 对任意$s<t$，$s, t\in T$，因f非降以及

$$E(x_t|\mathscr{F}_s)\geqslant x_s,$$

故

$$f[E(x_t|\mathscr{F}_s)]\geqslant f(x_s). \tag{3}$$

根据Jensen不等式（§4.1习题16）有

$$f[E(x_t|\mathscr{F}_s)]\leqslant E[f(x_t)|\mathscr{F}_s]. \tag{4}$$

由(3)，(4)得

$$E[f(x_t)|\mathscr{F}_s]\geqslant f(x_s).$$

系1 设$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$是鞅（或非负下鞅），$\lambda\geqslant 1$为一常数。如对一切$t\in T$，$|x_t|^\lambda$可积，则$\{|x_t|^\lambda, \mathscr{F}_t\}$是下鞅。

证明 令$f(y)=|y|^\lambda$，则$f(y)$是凸函数(如果$y\geqslant 0$，则它还是非降的)，由定理2的(1)((2))推出该系的结论。

系2 如果$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$是下鞅，则$\{x_t^+, \mathscr{F}_t\}$也是下鞅。

证明 令

$$f(y)=\begin{cases} y, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0, \end{cases}$$

$f(y)$是连续非降函数，且是凸的。由定理2的(2)推出$\{f(x_t), \mathscr{F}_t\}$是下鞅。

习 题

1. 设T是离散的，求证鞅定义中的条件(c)等价于，对任意$n\geqslant 0$，

$$E(x_{n+1}|\mathscr{F}_n)=x_n$$

(关于上(下)鞅，也有相应结论)。

2. 证明上节例3中的(i)和(iii)是鞅。

3. 证明上节定理2中的(1)和(3)。

4. (似然比) 设$\{y_n, n\geqslant 0\}$是独立同分布的可积随机变数列，$f_0(z)$是它们共同的分布密度。$f_1(z)$，$f_2(z)$是两个概率分布密度函数，且对一切z，$f_2(z)>0$。令

$$x_n=\frac{f_1(y_0)f_1(y_1)\cdots f_1(y_n)}{f_2(y_0)f_2(y_1)\cdots f_2(y_n)}, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n).$$

问：f_0, f_1, f_2三者间有何关系时，$\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geq 0\}$是鞅？

5. 设$\{x_n, n \geq 0\}$是齐次马氏链，其状态空间为$E = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$。证明：如$\{x_n\}$关于$\mathscr{N}_n = \sigma(x_k, k \leq n)$，$n \geq 0$，是鞅，则状态0和$N$是吸收的。

6. 设$\{y_n, n \geq 1\}$为取值于$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$的独立同分布的随机变量列，$P(y_n = k) = a_k$。又设$\{x_n, n \geq 0\}$是以E为状态空间的齐次马氏链，$x_0 = 1$，$x_{n+1} = y_1 + \cdots + y_{x_n}$且其转移概率满足

$$p_{ij} = P(y_1 + \cdots + y_i = j), \quad i \geq 1, \quad j \geq 0,$$

$$p_{00} = 1.$$

试证

（i）如$0 < m = Ey_n < \infty$，则$\{m^{-n}x_n, \mathscr{F}_n, n \geq 0\}$是鞅，其中$\mathscr{F}_n = \sigma(x_0, \cdots, x_n)$；

(ii) 如常数$c > 0$满足$c = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$，则$\{c^{x_n}, \mathscr{F}_n\}$是鞅。

7. 设$\{y_n, n \geq 0\}$是随机变量序列，具有性质

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

关于$\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n)$是鞅，证明$Ey_iy_j = 0$，$i \neq j$。

8. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geq 0\}$是独立增量过程，且对一切$t \geq 0$，$E|x_t| < \infty$，$E|x_t|^2 < \infty$。试举出由$\{x_t\}$构造的鞅、上鞅和下鞅的例子。

9. 设$\{y_n, n \geq 0\}$是相互独立的随机变量序列，$Ey_n = 0$，$n \geq 0$，试问下列$\{x_n\}$中：

(a) $$x_n = \frac{y_0 + \cdots + y_n}{n},$$

(b) $x_n = y_0 y_1 \cdots y_n$，

(c) $x_n = |y_0 y_1 \cdots y_n|^{1/n}$，

(d) $x_n = e^{y_0 + \cdots + y_n}$，

哪些关于$\mathscr{F}_n = \sigma(y_k, k \leq n)$是鞅？

10. (Polya罐子模型) 设罐内装有r个红球和b个黑球。自罐中按下法重复抽球：随机地抽一球并放回，同时添加a个与被抽出的球颜色相同的球。令

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{如第 } n \text{ 次抽出的球是红球,} \\ 0, & \text{如第 } n \text{ 次抽出的球是黑球.} \end{cases}$$

x_n表示第n次抽球手续结束后，罐中红球所占的比数，试证$\{x_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅．其中$\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n)$．并求$Ex_n$．

11．设$\{x_n, n \geqslant 0\}$是齐次马氏链，状态空间E为$(0, 1)$中的全体有理数，其转移概率为

$$P(x_{n+1} = ay | x_n = y) = 1 - y,$$

$$P(x_{n+1} = ay + 1 - b | x_n = y) = y,$$

其中$y \in E$，a，b是有理数，$0 < a \leqslant b < 1$．证明

(i) 如$a = b$，则$\{x_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅，其中$\mathscr{F}_n = \sigma(x_0, \cdots, x_n)$；

(ii) 如$a < b$，则$\{x_n, \mathscr{F}_n\}$是上鞅．

12．设$\{\xi_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$是鞅，且对每一个$t \geqslant 0$，$E\xi_t^2 < \infty$．求证：$\xi_t$的增量是不相关的．

13．设$\{\xi_t, t \geqslant 0\}$是独立增量过程，$\xi_0 = 0$，且$E\xi_t \equiv 0$．又$E(\xi_t - \xi_s)^2 = F(t) - F(s)$　$0 \leqslant s \leqslant t$．那么$\{\xi_t^2 - F(t), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$是鞅．其中$\mathscr{F}_t = \sigma(\xi_s, s \leqslant t)$，$F(t)$是$t$的非负增函数．

§5.2　离散鞅的基本不等式

这一节我们证明几个基本不等式，为此，先证明一个重要定理（称为**Doob有界停时定理**，非有界的场合以后再证）．

设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是鞅（或下鞅），对$n \geqslant m$有

$$E(x_n | \mathscr{F}_m) = x_m \ (\text{或} \geqslant x_m).$$

问题是：如将n，m随机化，即将n，m换成随机时间（停时）后，上式是否仍成立？对过程参数的这种替换，我们在考虑强马氏过程时已遇到过．下面的定理指出，当停时有界时，则答案是肯定的．

回忆停时的定义，如τ取值$\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$，则$\tau$是$\{\mathscr{F}_n\}$停时的充要条件为$(\tau = n) \in \mathscr{F}_n$，$0 \leqslant n \leqslant \infty$．

定理1　设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是下鞅，$\sigma$及$\tau$是$\{\mathscr{F}_n\}$停时且有界，如$\sigma \leqslant \tau$，则

（i）$E|x_\sigma|<\infty$，$E|x_\tau|<\infty$；

（ii）$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant x_\sigma$。　　（1）

如$\{x_n\}$是鞅，则（1）式中"$\geqslant$"改为"$=$"。

证明　只证下鞅情形。设$\tau\leqslant N$，则

$$|x_\tau|\leqslant\sum_{j=0}^{N}|x_j|,\quad |x_\sigma|\leqslant\sum_{j=0}^{N}|x_j|.$$

从而x_τ，x_σ可积。令$A\in\mathscr{F}_\sigma$，则

$$A(\sigma=j)(\tau>j)\in\mathscr{F}_j. \tag{2}$$

如果$\tau-\sigma\leqslant 1$，那么由下鞅性及（2），对$A\in\mathscr{F}_\sigma$有

$$\int_A(x_\sigma-x_\tau)\,P(d\omega)=$$

$$=\sum_{j=0}^{N}\int_{A\cap(\sigma=j)(\tau>j)}(x_j-x_{j+1})\,P(d\omega)\leqslant 0. \tag{3}$$

对一般情形，令

$$\alpha_j=\tau\wedge(\sigma+j),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,$$

则α_j是$\{\mathscr{F}_n\}$停时，且

$$\sigma\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_N=\tau,$$

$$\alpha_1-\sigma\leqslant 1,\ \alpha_{j+1}-\alpha_j\leqslant 1,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1. \tag{4}$$

于是对任一$A\in\mathscr{F}_\sigma$，由§4.4停时性质3，$A\in\mathscr{F}_{\alpha_j}$（$1\leqslant j\leqslant N$），故由（3），（4）得

$$\int_A x_\sigma P(d\omega)\leqslant\int_A x_{\alpha_1}P(d\omega)\leqslant\cdots\leqslant\int_A x_\tau P(d\omega),$$

再因x_σ是$\mathscr{F}_\sigma$可测，故（1）得证。

系　设$\{x_n\}$是下鞅（鞅），σ，τ是有界停时，则

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant x_{\sigma\wedge\tau}. \tag{5}$$

如$\{x_n\}$是鞅则上式中"$\geqslant$"改为"$=$"。

证明　只证下鞅情形，因

$$x_\sigma=I_{\sigma\geqslant\tau}x_\sigma+I_{\sigma<\tau}x_\sigma$$

$$=I_{\sigma\geqslant\tau}x_{\sigma}+I_{\sigma<\tau}x_{\sigma\wedge\tau}.$$

由停时性质（见§4.5习题4）知 $(\sigma<\tau)\in\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}\subseteq\mathscr{F}_{\tau}$，因此，

$$E(I_{\sigma<\tau}x_{\sigma\wedge\tau}|\mathscr{F}_{\tau})=I_{\sigma<\tau}x_{\sigma\wedge\tau}, \tag{6}$$

由§4.5习题5有

$$E(I_{\sigma\geqslant\tau}x_{\sigma}|\mathscr{F}_{\tau})=I_{\sigma\geqslant\tau}E(x_{\sigma}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau})$$
$$\geqslant I_{\sigma\geqslant\tau}x_{\sigma\wedge\tau}. \tag{7}$$

后一不等式是由定理1推出的。

综合（6）和（7）得

$$\begin{aligned}E(x_{\sigma}|\mathscr{F}_{\tau})&=E(I_{\sigma\geqslant\tau}x_{\sigma}|\mathscr{F}_{\tau})+E(I_{\sigma<\tau}x_{\sigma\wedge\tau}|\mathscr{F}_{\tau})\\&\geqslant I_{\sigma\geqslant\tau}x_{\sigma\wedge\tau}+I_{\sigma<\tau}x_{\sigma\wedge\tau}\\&=x_{\sigma\wedge\tau}.\end{aligned}$$

定理 2 设 $\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant0\}$ 是下鞅，则对任意 $\lambda>0$ 及 $n\geqslant0$ 有

（a）$\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n}x_k\geqslant\lambda\}$

$$\leqslant\int_{(\max\limits_{k\leqslant n}x_k\geqslant\lambda)}x_nP(d\omega)\leqslant Ex_n^+\leqslant E|x_n|;$$

（b）$\lambda P\{\min\limits_{k\leqslant n}x_k\leqslant-\lambda\}\leqslant-Ex_0$

$$+\int_{(\min\limits_{k\leqslant n}x_k>-\lambda)}x_nP(d\omega)$$

$$\leqslant Ex_n^+-Ex_0\leqslant E|x_0|+E|x_n|;$$

（c）$\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant\lambda\}\leqslant2Ex_n^+-Ex_0\leqslant2E|x_n|+E|x_0|$.

证明 （a）令

$$\tau=\begin{cases}\min\{k:\ k\leqslant n,\ x_k\geqslant\lambda\},\\ n,\ \text{如上集空,}\end{cases}$$

则 τ 是 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时，而且 $\tau\leqslant n$。记集合

$$M=\{\max_{k\leqslant n}x_k\geqslant\lambda\},$$

则在 M 上，$x_\tau\geqslant\lambda$ 而且 $M\in\mathscr{F}_\tau$，实际上，对任意 $j\leqslant n$，

$$M\cap(\tau=j)=(x_k<\lambda,\ 0\leqslant k<j,\ x_j\geqslant\lambda)\in\mathscr{F}_j.$$

因此，对 τ，n 用有界停时定理得

$$\lambda P(M)\leqslant\int_M x_\tau P(d\omega)\leqslant\int_M x_n P(d\omega),$$

即得（a）的第一个不等式。（a）的第二和第三个不等式是因为

$$\int_M x_n P(d\omega)\leqslant\int_M x_n^+ P(d\omega)\leqslant Ex_n^+\leqslant E|x_n|.$$

（b）类似地，令

$$\tau=\begin{cases}\min(k: k\leqslant n,\ x_k\leqslant-\lambda),\\ n,\ 如上集空,\end{cases}$$

并记集 $M=\{\min\limits_{k\leqslant n} x_k\leqslant-\lambda\}$。因 $\tau\leqslant n$，对 0，τ 用有界停时定理得

$$Ex_0\leqslant Ex_\tau=\int_M x_\tau P(d\omega)+\int_{M^c}x_\tau P(d\omega)$$

$$\leqslant-\lambda P(M)+\int_{M^c}x_n P(d\omega),$$

即得（b）的第一个不等式。第二个不等式是因为

$$\int_{M^c}x_n P(d\omega)\leqslant\int_{M^c}x_n^+ P(d\omega)\leqslant Ex_n^+.$$

第三个不等式是明显的。

（c）由（a）和（b）推出。

由定理 2 可得

系 设 $\{x_n\}$ 是鞅，且对某 $p\geqslant1$，$E|x_n|^p<\infty$，$n=0,1,2,\cdots$。那么对每一个 n，

$$P(\max_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant\lambda)\leqslant E|x_n|^p/\lambda^p. \qquad (8)$$

证明 由§5.1定理 2 的系 2 知，$\{|x_n|^p\}$ 是下鞅。对此下鞅及 λ^p 用上面定理 2（a），即得

$$\lambda^p P(\max_{k\leqslant n}|x_k|^p\geqslant\lambda^p)\leqslant E|x_n|^p,$$

由于

$$P(\max_{k\leqslant n}|x_k|^p\geqslant\lambda^p)=P(\max_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant\lambda),$$

故得(8)。

特别，如$\{y_n, n\geqslant 0\}$是独立同分布随机序列且$Ey_n=0$，$Ey_n^2=\sigma^2<\infty$。如令$x_n=\sum_{k=0}^{n}y_k$，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_k, k\leqslant n)$，$p=2$。那么(8)就是众所熟知的相互独立随机变量序列的柯氏不等式。

定理 3 设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$是非负下鞅，$p>1$则

$$E(\max_{k\leqslant n}x_k^p)\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p Ex_n^p. \tag{9}$$

证明 令

$$Y=\max_{k\leqslant n}x_k,$$

由定理 2 的(a)知

$$\lambda P(Y\geqslant\lambda)\leqslant\int_\Omega I_{(Y\geqslant\lambda)}x_nP(d\omega). \tag{10}$$

因此

$$EY^p=\int_\Omega dP\int_0^Y p\lambda^{p-1}d\lambda=\int_\Omega dP\int_0^\infty I_{(Y\geqslant\lambda)}\cdot p\lambda^{p-1}d\lambda=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}P(Y\geqslant\lambda)d\lambda.$$

由(10)及 Fubini 定理，上式右方

$$\begin{aligned}&\leqslant\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left[\frac{1}{\lambda}\int_{(Y\geqslant\lambda)}x_nP(d\omega)\right]d\lambda\\&=\int_\Omega x_n\left[\int_0^Y p\lambda^{p-2}d\lambda\right]P(d\omega)\\&=\frac{p}{p-1}E(x_nY^{p-1}).\end{aligned} \tag{11}$$

置$q=\frac{p}{p-1}$，易见，$q>0$且$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$，于是由

(11) 及 Hölder 不等式

$$EY^p \leqslant q\{Ex_n^p\}^{1/p}\{E(Y^{p-1})^q\}^{1/q} = q\{Ex_n^p\}^{1/p}\{EY^p\}^{1/q}.$$

如果$EY^p \neq 0$，用$(EY^p)^{1/q}$除上式两边，得

$$(EY^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}(Ex_n^p)^{1/p},$$

将上式两边p次方，即得(9)式。

如$EY^p = 0$，则$Ex_n^p = 0$，(9)式仍成立。

系(Doob不等式) 设$\{x_n\}$为非负下鞅，$p > 1$ 则

$$\{E(\sup_{k \geqslant 0} x_k)^p\}^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{k \geqslant 0} \{Ex_k^p\}^{1/p}. \qquad (12)$$

证明 由(9)，推得

$$\{E(\max_{k \leqslant n} x_k^p)\}^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\{Ex_n^p\}^{1/p}$$

$$\leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{k \geqslant 0} \{Ex_k^p\}^{1/p},$$

上式两边令$n \to \infty$即得所需证明的(12)式。

$p = 1$的情形留作习题([4]，定理2.15)。

下面证明极为重要的关于半鞅的**上穿不等式**。这个不等式给出半鞅在有穷区间内的平均"振荡"次数的估计式，在证明半鞅的收敛性定理时要用到它。

先介绍上穿概念。设已给闭区间$[a, b]$及M个数x_1，x_2，$\cdots x_M$，如果从x_1起顺次到x_M，自$[a, b]$的左方到其右方共V次，我们就说数列x_1，x_2，$\cdots$，x_M，上穿$[a, b]$的次数为V。确切的定义如下：令

$$\tau_1 = \begin{cases} \min(n : 0 \leqslant n \leqslant M,\ x_n \leqslant a), \\ M+1，\text{如上面的集是空集}; \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \min(n : \tau_1 < n \leqslant M,\ x_n \geqslant b), \\ M+1，\text{如上面的集是空集}; \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\tau_k=\begin{cases}\min(n,\ \sigma_{k-1}< n\leqslant M,\ x_n\leqslant a),\\ M+1,\ \text{如上面的集是空集;}\end{cases}$$

$$\sigma_k=\begin{cases}\min(n,\ \tau_k< n\leqslant M,\ x_n\geqslant b),\\ M+1,\ \text{如上面的集是空集。}\end{cases}$$

定义 1 称使$\sigma_k\leqslant M$的最大的k为数列$\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_M\}$上穿$[a,\ b]$的次数，记为$V_a^b$（如果$\sigma_1=M+1$，则$V_a^b=0$）。

定理 4（上穿不等式） 设$\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots,\ M\}$是下鞅，$V_a^b$是$\{x_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$上穿$[a,\ b]$的次数，则

$$EV_a^b\leqslant\frac{1}{b-a}\{E(x_M-a)^+-E(x_0-a)^+\}$$

$$\leqslant\frac{1}{b-a}\{Ex_M^++|a|\}. \tag{13}$$

证明 令

$$y_n=(x_n-a)^+,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M.$$

由§5.1定理 2 的系 2 知$\{y_n,\ \mathscr{F}_n\}$是下鞅，显然y_n非负。易见$\{y_n\}$上穿$[0,\ b-a]$的次数等于V_a^b。因此下面我们考虑$\{y_n,\ \mathscr{F}_n\}$与$[0,\ b-a]$。在τ_k，σ_k的定义中，将a改为0，b改为$b-a$，x_n改成y_n，并补定义$\sigma_0=0$，$\tau_{M+1}=M+1$，$y_{M+1}=y_M$，则

$$y_M-y_0=\sum_{k=1}^{M}(y_{\sigma_k}-y_{\tau_k})+\sum_{k=1}^{M+1}(y_{\tau_k}-y_{\sigma_{k-1}}). \tag{14}$$

对任一ω，如$V_a^b(\omega)=r>0$，则

$$y_{\sigma_k}(\omega)-y_{\tau_k}(\omega)\geqslant b-a,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ r, \tag{15}$$

由于$y_{\sigma_k}(\omega)-y_{\tau_k}(\omega)\geqslant 0$，$k>r$，故

$$\sum_{k=1}^{M}(y_{\sigma_k}(\omega)-y_{\tau_k}(\omega))\geqslant(b-a)\cdot r$$

$$=(b-a)V_a^b(\omega); \tag{16}$$

当$r=0$时上式显然仍成立。于是

$$E\left[\sum_{k=1}^{M}(y_{\sigma_k}-y_{\tau_k})\right]\geqslant(b-a)EV_a^b. \qquad (17)$$

其次，由于τ_k，σ_{k-1}都是$\{\mathscr{F}_n\}$有界停时，且$\tau_k\geqslant\sigma_{k-1}$，故由定理 1 得$Ey_{\tau_k}\geqslant Ey_{\sigma_{k-1}}$，从而

$$E\left[\sum_{k=1}^{M+1}(y_{\tau_k}-y_{\sigma_{k-1}})\right]=\sum_{k=1}^{M+1}(Ey_{\tau_k}-Ey_{\sigma_{k-1}})\geqslant 0. \qquad (18)$$

故由(14)，(17)及(18)得

$$Ey_M-Ey_0\geqslant(b-a)EV_a^b,$$

此即

$$EV_a^b\leqslant\frac{1}{b-a}\{E(x_M-a)^+-E(x_0-a)^+\}.$$

(13)中第二个不等式是明显的。

习　题

1．设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是鞅，证明对任一$\lambda>0$，有

$$P(\max_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{(\max\limits_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant\lambda)}|x_n|P(d\omega)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}E|x_n|.$$

2．设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅（下鞅），$\tau$为$\{\mathscr{F}_n\}$停时。定义$y_n=x_{\tau\wedge n}$，证明$\{y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅（下鞅）。

3．设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅，$\tau$为$\{\mathscr{F}_n\}$停时且$\tau<\infty$。如果$E|x_\tau|<\infty$及$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{(\tau>n)}|x_n|P(d\omega)=0$，证明$Ex_\tau=Ex_0$。

4．设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots,N\}$是上鞅，$\tau$是$\{\mathscr{F}_n\}$停时，$\tau\leqslant N$。证明

$$E|x_\tau|\leqslant Ex_1+2Ex_N^-\leqslant 3\sup_{k\leqslant N}E|x_k|.$$

5．设$\{x_n,\mathscr{F}_n,n\leqslant N\}$是非负下鞅，证明

$$E(\max_{k\leqslant n} x_k)\leqslant\frac{e}{e-1}[1+\max_{k\leqslant n} E(x_k\log^+x_k)].$$

§5.3 离散鞅的收敛定理

定理 1 设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$是下鞅，满足条件

$$\sup_{n\geqslant 0} E|x_n|<\infty, \tag{1}$$

则存在$\mathscr{F}_\infty$可测的随机变量x_∞，使$E|x_\infty|<\infty$，且

$$P(\lim_{n\to\infty} x_n=x_\infty)=1, \tag{2}$$

其中 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$。

证明 令

$$A=\{\omega: \varliminf_{n\to\infty} x_n(\omega)<\varlimsup_{n\to\infty} x_n(\omega)\},$$

$$A(a, b)=\{\omega: \varliminf_{n\to\infty} x_n(\omega)<a<b<\varlimsup_{n\to\infty} x_n(\omega)\},$$

则A，$A(a, b)\in\mathscr{F}_\infty$。而且

$$A=\bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in Q}} A(a, b), \tag{3}$$

其中Q为全体有理数。

下面证明$P(A)=0$。令$V_a^b(M)$表示x_0，…，x_M上穿$[a, b]$的次数，V_a^b表示$x_0, x_1,\cdots$上穿$[a, b]$的次数。显然$V_a^b(M)$不减且

$$V_a^b=\lim_{M\to\infty} V_a^b(M)。$$

由上穿不等式得

$$EV_a^b(M)\leqslant\frac{1}{b-a}(Ex_M^++|a|)$$

$$\leqslant\frac{1}{b-a}(\sup_{M\geqslant 0} E|x_M|+|a|)。 \tag{4}$$

由(1)及(4)可见$EV_a^b<\infty$，从而

$$P(V_a^b<\infty)=1。\quad (5)$$

由于

$$A(a, b)\subseteq\{\omega: V_a^b(\omega)=+\infty\}$$

故由(5)知$P\{A(a, b)\}=0$，从而$P(A)=0$。换言之$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$几乎处处存在。令

$$x_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

则x_∞是$\mathscr{F}_\infty$可测，而且$x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$几乎处处成立。于是对$|x_n|$应用 Fatou 引理并注意(1)式，得

$$E|x_\infty|\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}E|x_n|\leqslant\sup_{n\geqslant0}E|x_n|<\infty。$$

定理证毕。

注意 由于

$$E|x_n|=2Ex_n^+-Ex_n\leqslant2Ex_n^+-Ex_1,$$

可见，对下鞅条件(1)等价于形式上较弱的条件

$$\sup_{n\geqslant0}Ex_n^+<\infty;$$

对于上鞅，由于

$$E|x_n|=Ex_n+2Ex_n^-\leqslant Ex_1+2Ex_n^-,$$

故(1)等价于条件

$$\sup_{n\geqslant0}Ex_n^-<\infty。$$

系 如$\{x_n\}$是非负上鞅，则以概率1，x_n收敛于$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的随机变量。

证明 因x_n是上鞅，故$-x_n$是下鞅。因此

$$E|-x_n|=Ex_n\leqslant Ex_1<\infty,$$

故条件(1)满足，从而$-x_n$以概率1收敛于$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的随机变量，此即x_n收敛。

这里自然产生了一个进一步的问题：若$x_n\to x_\infty$ a.e.(n

$\to\infty$)，何时$\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ 0\leqslant n\leqslant\infty\}$是鞅？为回答这个问题我们需要引进一致可积性的概念。

定义 1　称随机序列$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$为一致可积的，如满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\{|x_n|\geqslant\lambda\}}|x_n|P(d\omega)=0 \tag{6}$$

关于$n\geqslant 0$一致成立。

定理 2　设$\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant 0\}$是鞅(或下鞅)，如一致可积则存在$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的随机变量$x_\infty$，使

(i) $x_n\to x_\infty$　　a.e.$(n\to\infty)$；　　(7)

(ii) $E|x_n-x_\infty|\to 0\ (n\to\infty)$；

(iii) $\{x_n,\ \mathscr{F}_n,\ 0\leqslant n\leqslant\infty\}$是鞅(或下鞅)，即对一切$n\geqslant 0$，有

$$E(x_\infty|\mathscr{F}_n)=x_n(\text{或}\geqslant x_n)\quad \text{a.e.}。\tag{8}$$

证明　由于$\{x_n\}$一致可积，故当λ充分大时，对n一致地有

$$E|x_n|\leqslant\lambda+\int_{\{|x_n|\geqslant\lambda\}}|x_n|P(d\omega)\leqslant\lambda+\varepsilon,$$

从而$\sup\limits_{n\geqslant 0}E|x_n|<\infty$，于是由定理1，存在$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的$x_\infty$，使$x_n\to x_\infty$，a.e.。又因$\{x_n\}$一致可积，根据附录(二)定理2，有

$$E|x_n-x_\infty|\to 0\ (n\to\infty)。\tag{9}$$

往下证(8)。任取$A\in\mathscr{F}_\infty$，由(9)$EI_Ax_n\to Ex_\infty I_A$。因此由下鞅性，对$m>n$及$A\in\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}_\infty$有

$$\int_A x_nP(d\omega)=(\text{或}\leqslant)\int_A x_mP(d\omega)\to\int_A x_\infty P(d\omega)$$

$(m\to\infty)$，换言之$\int_A x_nP(d\omega)=(\text{或}\leqslant)\int_A x_\infty P(d\omega)$，(8)得证。

系 1　设$\{\mathscr{F}_n\}$是子σ代数流，$\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$。$Y$是可积随

(Doob的鞅收敛定理)

机变量，令

$$x_n=E(Y|\mathscr{F}_n)\ n\geqslant 0, \tag{10}$$

则

（a）$\{x_n\}$ 一致可积；

（b）$x_n\to E(Y|\mathscr{F}_\infty)$ a．e．且 $E|x_n-E(Y|\mathscr{F}_\infty)|\to 0$（$n\to\infty$）。

证明（a）由马尔科夫不等式

$$P(|x_n|\geqslant\lambda)\leqslant\lambda^{-1}E|x_n|\leqslant\lambda^{-1}E|Y|, \tag{11}$$

上式右方与 n 无关，且当 $\lambda\uparrow\infty$ 时趋于0。其次由(10)，

$$\int_{(|x_n|\geqslant\lambda)}|x_n|P(d\omega)\leqslant\int_{(|x_n|\geqslant\lambda)}|Y|P(d\omega)$$

$$\leqslant kP(|x_n|\geqslant\lambda)+\int_{(|Y|\geqslant k)}|Y|P(d\omega). \tag{12}$$

对给定的 $\varepsilon>0$，选定 k，使上式右方第二项小于 $\varepsilon/2$。对此 k，由(11)取充分大的 λ，使(12)右方第一项小于 $\varepsilon/2$，于是当 λ 充分大时，对一切 $n\geqslant 1$ 有，

$$\int_{\{|x_n|\geqslant\lambda\}}|x_n|P(d\omega)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 一致可积。

（b）因 $\{x_n,\ \mathscr{F}_n\}$ 是鞅，由（a）及定理2，存在 $\mathscr{F}_\infty$ 可测且可积的 x_∞，使

$$x_n\to x_\infty\qquad \text{a．e．}(n\to\infty),$$

且

$$E|x_n-x_\infty|\to 0\ (n\to\infty).$$

下证 $x_\infty=E(Y|\mathscr{F}_\infty)$。因为 $E|x_n-x_\infty|\to 0$，故对 $A\in\mathscr{F}_\infty$ 有 $EI_Ax_n\to EI_Ax_\infty$。从而，对任一 $A\in\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}_\infty$，有

$$\int_A YP(d\omega)=\int_A x_nP(d\omega)\to\int_A x_\infty P(d\omega)\ (n\to\infty),$$

所以

$$EI_AY=EI_Ax_\infty, \tag{13}$$

上式对一切 $A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 成立。用 λ-系法即知 (13) 对一切 $A \in \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n\right) = \mathscr{F}_{\infty}$ 成立，从而

$$x_{\infty} = E(Y | \mathscr{F}_{\infty}).$$

现考虑反向鞅（半鞅）的收敛定理。

设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的反向子 σ 代数流，亦即 $\mathscr{F}_0 \supseteq \mathscr{F}_1 \supseteq \mathscr{F}_2 \supseteq \cdots$。

定义 2 称 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 的反向鞅(反向上鞅或反向下鞅)，如果

(i) x_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测，且 $E|x_n| < \infty$；

(ii) 对 $m > n$，$E(x_n | \mathscr{F}_m) = x_m$（相应地"$\leqslant$"，或"$\geqslant$"）。

例 Z，y_n，$n \geqslant 0$ 都是随机变量，且 $E|Z| < \infty$。令

$$\mathscr{F}_n = \sigma(y_n, y_{n+1}, \cdots), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$x_n = E(Z | \mathscr{F}_n),$$

则 $\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是反向鞅。这是因为对 $n < m$，

$$\mathscr{F}_n \supseteq \mathscr{F}_m$$

且

$$E(x_n | \mathscr{F}_m) = E\{E(Z | \mathscr{F}_n) | \mathscr{F}_m\} = E(Z | \mathscr{F}_m) = x_m.$$

定理 3 设 $\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为反向下鞅，则存在 $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 可测的随机变量 $x_{-\infty}$，使

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_{-\infty} \quad \text{a.e.}.$$

证明 令 $V_a^b(n)$ 表示 $\{x_n, x_{n-1}, \cdots x_0\}$ 上穿 $[a, b]$ 的次数，V_a^b 表示 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 上穿 $[a, b]$ 的次数。显然，$V_a^b = \lim_{n \to \infty} V_a^b(n)$。由 § 5.2 定理 4 知

$$EV_a^b(n) \leqslant \frac{1}{b-a}(Ex_0^+ + |a|) < \infty,$$

上式右方与n无关。令$n\to\infty$，即知$EV_a^b<\infty$。与本节定理1的证法完全类似，可知存在$x_{-\infty}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$是$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$可测，且有

$$x_{-\infty}=\lim_{n\to\infty}x_n \quad \text{a.e.}$$

成立。

定理3中的$x_{-\infty}$不一定可积，如对$\{Ex_n\}$附加条件，则可得到

定理4 设$\{x_n, \mathscr{F}, n\geqslant 0\}$是反向下鞅，如

$$\lim_{n\to\infty}Ex_n>-\infty, \tag{14}$$

则有

（i）$\{x_n\}$一致可积；

（ii）存在$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$可测且可积的随机变量$x_{-\infty}$，使得当$n\to\infty$时

$$x_n\to x_{-\infty} \quad \text{a.e.}, \quad \text{且} E|x_n-x_{-\infty}|\to 0.$$

证明 由定义知，Ex_n不增，因此(14)保证存在常数c，使

$$\lim_{n\to\infty}Ex_n=c. \tag{15}$$

下证$\{x_n\}$一致可积。

对$\varepsilon>0$，取k，使

$$Ex_k-\lim_{n\to-\infty}Ex_n<\varepsilon. \tag{16}$$

我们有

$$E(|x_n|;|x_n|>\lambda)=E(x_n, x_n>\lambda)-E(x_n, x_n<-\lambda)$$
$$=E(x_n;x_n>\lambda)+E(x_n, x_n\geqslant-\lambda)-Ex_n.$$

若$n\geqslant k$，由反向下鞅性，(16)及Ex_n不增，得到上式右方

$$\leqslant E(x_k, x_n>\lambda)+E(x_k, x_n\geqslant-\lambda)-Ex_k+\varepsilon=$$
$$E(x_k, x_n>\lambda)-E(x_k, x_n<-\lambda)+\varepsilon\leqslant E(|x_k|, x_n>\lambda)+E(|x_k|, x_n<-\lambda)+\varepsilon=E(|x_k|, |x_n|>\lambda)+\varepsilon. \tag{17}$$

因为

$$P(|x_n|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}E|x_n|=\frac{1}{\lambda}(2Ex_n^+-Ex_n)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}(2Ex_0^+-c),\tag{18}$$

故当 λ 足够大时，$P(|x_n|>\lambda)$ 关于 n 一致地小。从而当 λ 足够大时，(17) 式右方可以小于 2ε 关于 n 一致地成立。此即证明了 $\{x_n\}$ 是一致可积的。

由定理 3 存在 $x_{-\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_{-\infty}$ a.e.。于是由附录(二)定理 2 知，当 $n\to\infty$ 时有

$$E|x_n-x_{-\infty}|\to 0$$

且
$$E|x_{-\infty}|=\lim_{n\to\infty}E|x_n|<\infty,$$

即 $x_{-\infty}$ 可积。

令 $y_{-n}=x_n$，$\mathscr{G}_{-n}=\mathscr{F}_n$，易见 $\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ 是反向鞅（下鞅）当且仅当 $\{y_{-n}, \mathscr{G}_{-n}, n\geqslant 0\}$ 是鞅(下鞅)。

习　题

1. 设 $\sup\limits_{n\geqslant 0}E|x_n|^p<\infty$，其中 $p>1$。则 $\{x_n\}$ 是一致可积的。

2. 设 $\{y_n, n\geqslant 0\}$ 及 Z 为可积随机变量且 $|y_n|\leqslant Z$，$y_n\longrightarrow y_\infty$ ($n\longrightarrow\infty$)。试证对任意子 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}E(y_n|\mathscr{F}_n)=E(y_\infty|\mathscr{F}_\infty).$$

提示 对任意 m，令

$$x_m=\sup_{n\geqslant m}|y_n-y_\infty|$$

则 $|x_m|\leqslant 2Z$，$\lim\limits_{m\to\infty}x_m=0$，由定理 2 系 1 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}E(|y_n-y_\infty||\mathscr{F}_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}E(x_m|\mathscr{F}_n)=E(x_m|\mathscr{F}_\infty).$$

令 $m\to\infty$，由控制收敛定理上式右方趋于 0。

3. 证明对任一 $A\in\mathscr{F}_\infty$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(A|\mathscr{F}_n) = I_A.$$

4. 设$\{x_n, n\geq 0\}$为齐次马氏链，状态空间E为$(0, 1)$中的全体有理数。令$a\in E$，如$\{x_n\}$的转移概率为：对任一$y\in E$，

$$P(x_{n+1}=ay|x_n=y)=1-y,$$
$$P(x_{n+1}=ay+1-a|x_n=y)=y.$$

试证

(i) $\{x_n, \mathscr{N}_n, n\geq 0\}$是鞅，其中$\mathscr{N}_n=\sigma(x_0, x_1, \cdots, x_n)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$或1 a.e.且$Ex_0=P(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1)$。

5. 试举不收敛下鞅的例。

6. 试求§5.1习题10（Pólye罐子模型）中$\{x_n, \mathscr{F}_n\}$的$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的数学期望。

7. 设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geq 0\}$是下鞅，证明下列三个条件彼此等价：

(a) $\{x_n\}$一致可积；

(b) 存在可积的x_∞，使$E|x_n-x_\infty|\longrightarrow 0$，$(n\to\infty)$；

(c) 存在可积的x_∞，使$x_n\to x_\infty$ a.e.，$x_n\leqslant E(x_\infty|\mathscr{F}_n)$且$Ex_n\to Ex_\infty$ $(n\to\infty)$。

8. 设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geq 0\}$是鞅，证明上题的条件(a)和(b)与下面的条件等价：

(d) 存在可积的x_∞，使$x_n\to x_\infty$ a.e.且

$$E(x_\infty|\mathscr{F}_n)=x_n;$$

(e) 存在可积的随机变量Y，使$x_n=E(Y|\mathscr{F}_n)$，$n\geq 0$。

✓ 9. 设$\{x_n, n\geq 0\}$是不可分的常返齐次马氏链，其状态空间为E，转移概率为p_{ij}，$i, j\in E$。如果定义在E上的有界函数$f(i)$，$i\in E$满足

$$f(i)=\sum_{j\in E} f(j)p_{ij}.$$

试证f必为常数。

提示 $\{y_n=f(x_n)\}$是$\mathscr{N}_n=\sigma(x_0, x_1, \cdots, x_n)$鞅，并由常返和不可分性知，对任意$i, j\in E$有无穷多个$n$，$m$使$y_n=f(i)$，$y_m=f(j)$。

10. 设X可积，$\{\mathscr{F}_n, n\geq 0\}$是$\sigma$代数流。证明

$$\lim_{n\to\infty} E(X|\mathscr{F}_{-n}) = E\left(X \middle| \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_{-n}\right).$$

11．利用鞅收敛定理，证明独立同分布随机变数列的强大数定理：设 $x_0, x_1, \cdots$，为独立同分布的随机变量序列且 $E|x_n|<\infty$，令 $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = Ex_0 \quad \text{a.e.}$$

§5.4　连续参数鞅的样本函数性质及收敛定理

（一）样本函数的性质

下面先证明几个基本不等式。以 T 表示 $[0, \infty)$，T^+ 表示 $(0, \infty)$。

设已给随机过程 $\{x_t, t\in T\}$，$D=\{t_1, t_2, \cdots\}$ 为 T 的一可列子集。令 $U_n=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 为 D 的前 n 个元素，将 U_n 的元素按大小重新排列，设为 $t_{a_1}<t_{a_2}<\cdots<t_{a_n}$。以 $V_a^b(U_n)$ 表示 $\{x_{t_{a_k}}, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 严格上穿区间 $[a, b]$（亦即自小于 a 到大于 b）的次数。显然

$$V_a^b(U_n)\leqslant V_a^b(U_{n+1}).$$

记

$$V_a^b(D) = \lim_{n\to\infty} V_a^b(U_n),$$

它表示 $\{x_t, t\in D\}$ 严格上穿区间 $[a, b]$ 的次数。

定理 1　设 $\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$ 是下鞅，D 是 T 中的一个可列子集，则对任意 $r, s\in T$，$r<s$ 及任意区间 $[a, b]$ 和 $\lambda>0$ 有

$$\text{(i)}\quad E\{V_a^b(D\cap[r, s])\}\leqslant \frac{1}{b-a}E(x_s-a)^+ \tag{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}(Ex_s^+ + |a|).$$

$$\text{(ii)}\quad \lambda P\{\sup_{t\in D\cap[r, s]} x_t\geqslant\lambda\}\leqslant E|x_s|. \tag{2}$$

系 设$\{x_t\}$是鞅，且对任意$t\geqslant 0$ $E|x_t|^p<\infty$，那么有

(iii) 对任意$p\geqslant 1$，

$$P\{\sup_{t\in D\cap[r,\ s]}|x_t|>\lambda\}\leqslant\frac{1}{\lambda^p}E|x_s|^p, \tag{3}$$

(iv) 对任意$p>1$

$$E\{\sup_{t\in D\cap[r,\ s]}|x_t|^p\}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|x_s|^p. \tag{4}$$

证明 (i) 设$D\cap[r,\ s]=\{t_1,\ t_2,\ \cdots\}$。令

$U_n=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\}$。据§5.2定理4有

$$EV_a^b(U_n)\leqslant\frac{1}{b-a}(E(x_{t_n}-a)^+), \tag{5}$$

其中t_n是U_n中的最大数。由§5.1定理2系2知$(x_t-a)^+$也是下鞅，因此$E(x_{t_n}-a)^+\leqslant E(x_s-a)^+$ $(t_n\leqslant s)$。故由(5)得

$$EV_a^b(U_n)\leqslant\frac{1}{b-a}\cdot(E(x_s-a)^+). \tag{6}$$

在上式中令$n\to\infty$，由单调收敛定理得

$$E\{V_a^b(D\cap[r,\ s])\}\leqslant\frac{1}{b-a}(E(x_s-a)^+)<\infty. \tag{7}$$

此外，(i) 中第二个不等式是显然的。

(ii) 据§5.2定理2的(a)，我们有

$$\lambda P\{\sup_{t\in U_n}x_t\geqslant\lambda\}\leqslant Ex_{t_n}^+, \tag{8}$$

其中t_n是U_n中的最大数，因$\{x_t^+\}$是下鞅故$Ex_{t_n}^+\leqslant Ex_s^+$。
于是由(8)得

$$\lambda P(\sup_{t\in U_n}x_t\geqslant\lambda)\leqslant Ex_s^+\leqslant E|x_s|,$$

令$n\to\infty$得(2)式。

(iii)和(iv)留作习题。

系1 设$\{x_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\in T\}$是下鞅且几乎一切轨道右连续，则

(ii)，(iii)和(iv)中的D可去掉。

证 取D是T的一个可列稠集，由定理1知有(ii)，(iii)和(iv)的成立。但当轨道右连续时 $\sup\limits_{t\in D\cap[r,s]}|x_t|=\sup\limits_{t\in[r,s]}|x_t|$，故系1结论正确。

系 2 设$\{x_t\}$是下鞅，D是T中任一可列子集，则对几乎一切的ω，$x(s,\omega)$，$s\in D$在T的任一有穷区间上有界。如果$\{x_t\}$的样本函数右连续。则对几乎所有的ω，$x(t,\omega)$，$t\in T$在任一有穷区间上有界。

证明 由(2)我们有

$$P(\sup_{t\in D\cap[0,n]}|x_t|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}E|x_n|.$$

令$\lambda\to\infty$，得

$$P(\sup_{t\in D\cap[0,n]}|x_t|=\infty)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&P\{\omega: x(s,\omega)\ s\in D\text{ 在}T\text{的任一有穷区间上有界}\}\\&=P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}(\omega\ \sup_{t\in D\cap[0,n]}|x(t,\omega)|<\infty)\right\}=1.\end{aligned}$$

如果$x(t,\omega)$右连续取D为T的一个可列稠子集，则 $\sup\limits_{t\in D\cap[0,n]}|x(t,\omega)|<\infty$等价于 $\sup\limits_{t\in[0,n]}|x(t,\omega)|<\infty$。

利用定理1的结果，我们可以得到重要的定理(Föllmer引理)。它是鞅论中的一个较新的结果(1972年)。这个结果与经典的上鞅右连续修正引理的本质区别在于取消了关于$\mathscr{F}$的完备性及$\mathscr{F}_0$(从而一切$\mathscr{F}_t$)包含$\mathscr{F}$中所有P-零测集的假定。该定理是对上鞅叙述的，我们改为对下鞅叙述。

称鞅或半鞅右连续，如所有的样本函数右连续。并记$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathscr{F}_s$。

定理 2（Föllmer引理）设$\{x_t,\ \mathscr{F}_t, t\in T\}$为鞅（或下鞅）。$D$为$T$中的一可列稠集，则存在鞅（或下鞅）$\{y_t,\ \mathscr{F}_{t^+},\ t\in T\}$，使得

（i）$\{y_t\}$的所有轨道右连续，且对几乎所有ω，对一切$t\in T$，有

$$y_t(\omega)=\lim_{\substack{s\in D\\ s\downarrow t}} x_s(\omega); \tag{9}$$

（ii）对几乎所有ω，对一切$t\in T^+$，$y_t(\omega)$存在有穷的左极限，且

$$y_{t^-}=\lim_{\substack{s\in D\\ s\uparrow t}} x_s(\omega); \tag{10}$$

（iii）对一切 $t\in T$，

$$x_t=E(y_t|\mathscr{F}_t)\qquad（或\leqslant）; \tag{11}$$

（iv）$\{y_t,\ \mathscr{F}_{t^+}\}$是鞅（或下鞅）。

证明 先造$\{y_t\}$如下：对任意$t\in T$及区间$[a,\ b]$，令

$$H_{t,a,b}=\{\omega:\sup_{s\in D\cap[0,t]}|x_s(\omega)|=\infty\}\cup\{\omega: V_a^b(\omega: D\cap[0,\ t])=\infty\},$$

则$H_{t,a,b}\in\mathscr{F}_t$，且由定理 1 及其系 2 知，$P(H_{t,a,b})=0$。

令

$$H_t=\bigcup_{\substack{a<b\\ a,\ b有理数}} H_{t,a,b},\quad H=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n=\bigcup_{t\in T}H_t, \tag{12}$$

则$H_t\in\mathscr{F}_t$，且$P(H)=0$。对每一$t\in T$，令

$$H_{t^+}=\bigcap_{s>t} H_s, \tag{13}$$

则$H_{t^+}\in\mathscr{F}_{t^+}$。且如$\omega\notin H_{t^+}$，则存在$\hat{t}>t$，使$\omega\notin H_{\hat{t}}$，从而$\lim\limits_{s\in D,\ s\downarrow t} x_s(\omega)$存在且有穷。定义

$$y_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D,\ s\downarrow t} x_s(\omega), & \omega\notin H_{t^+},\\ 0, & \omega\in H_{t^+}.\end{cases} \tag{14}$$

显然$\{y_t\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程。往下分几步证明$\{y_t\}$具有所要求的性质。

第一步 证明（i）成立。

任取ω及$t\in T$，如$\omega\in H_{t^+}$，则$\omega\in H_{r^+}$，对一切$r\geqslant t$。从而由（14）知当$r\geqslant t$时，$y_r(\omega)=0$，故$y(\cdot,\ \omega)$在t处右连续。如$\omega\notin H_{t^+}$，则由（13），必存在$r_0>t$，对一切$r\in[t,\ r_0]$有$\omega\notin H_{r^+}$。由（14）知，

给定$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，$\delta<r_0-t$，当$s\in D\cap(t,\ t+\delta)$时有

$$|y_t(\omega)-x_s(\omega)|\leqslant\varepsilon. \tag{15}$$

于是当$r\in(t,\ t+\delta)$时，注意$\omega\notin H_{r^+}$，我们有

$$|y_t(\omega)-y_r(\omega)|=\lim_{\substack{s\in D\\ s\downarrow r}}|y_t(\omega)-x_s(\omega)|\leqslant\varepsilon, \tag{16}$$

即$y(\cdot,\ \omega)$在t处右连续。因此，$\{y_t\}$的一切样本函数在T上右连续。

另一方面，当$\omega\notin H$时，因对一切$t\in T^+$，$\omega\notin H_t$，故由（14）即得（9）。

第二步 证明（ii）成立。

对任意$\omega\notin H$及$t\in T^+$，因$\omega\notin H$，故$\lim\limits_{\substack{s\in D\\ s\uparrow t}}x(s,\ \omega)$存在且有穷，记$\tilde{x}(t,\ \omega)=\lim\limits_{\substack{s\in D\\ s\uparrow t}}x(s,\ \omega)$。

任给$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使对一切$s\in(t-\delta,\ t)\cap D$有

$$|\tilde{x}(t,\ \omega)-x(s,\ \omega)|\leqslant\varepsilon/2. \tag{17}$$

对任一$r\in(t-\delta,\ t)$，因为$\omega\notin H_{r^+}$，由（14）可选取$s>r$，$s\in D\cap(t-\delta,\ t)$，使

$$|y(r,\ \omega)-x(s,\ \omega)|\leqslant\varepsilon/2. \tag{18}$$

由（17）和（18），当$r\in(t-\delta,\ t)$时有

$$|y(r,\omega)-x(t,\omega)|\leqslant|y(r,\omega)-x(s,\omega)|+|x(s,\omega)-\tilde{x}(t,\omega)|\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

可见，$\lim\limits_{r\uparrow t} y(r,\omega)=\tilde{x}(t,\omega)$。即 $y(t^-,\omega)$ 存在且(10)式成立.（以下假设$\{x_t\}$是下鞅.）

第三步 证明（11）式成立.

令 $r_n\in D$，$r_n\downarrow t$。任取 $A\in\mathscr{F}_t$，则

$$\int_A x_t P(d\omega)\leqslant\int_A x_{r_n} P(d\omega). \tag{19}$$

因 $\{x_{r_n},\ \mathscr{F}_{r_n},\ n\geqslant 1\}$ 是反向下鞅，且 $Ex_t\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}Ex_{r_n}$ 由§5.3定理4知$\{x_{r_n}\}$一致可积，又因（9），从而 $\lim\limits_{n\to\infty}E|x_{r_n}-y_t|=0$。于是，在（19）中令 $n\to\infty$即得

$$\int_A x_t P(d\omega)\leqslant\int_A y_t P(d\omega),$$

此即证明了（11）式。

第四步 证明$\{y_t,\ \mathscr{F}_{t^+},\ t\in T\}$为下鞅.

令 $s<s_n<t<t_n$，t_n，$s_n\in D$，$t_n\downarrow t$，$s_n\downarrow s$。对$A\in\mathscr{F}_{s^+}$，因$\{x_t\}$是下鞅，我们有

$$\int_A x_{s_n} P(d\omega)\leqslant\int_A x_{t_n} P(d\omega).$$

与第三步处理（19）式中$\{x_{r_n}\}$一样，在上式两边令 $n\to\infty$得

$$\int_A y_s P(d\omega)\leqslant\int_A y_t P(d\omega).$$

定理证毕

系 如下鞅（鞅）$\{x_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\in T\}$右连续，则

（a）$\{x_t,\ \mathscr{F}_{t^+},\ t\in T\}$是下鞅（鞅）；

（b）对几乎所有的ω，$x(t,\omega)$在一切$t>0$上有有穷左极限。

证明作习题。

定理 3 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$为下鞅，如$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则下列二条件等价：

（a）Ex_t在$t\geqslant 0$上右连续；

（b）$\{x_t\}$有右连续修正下鞅$\{y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$。

证明 （a）⇒（b）设D为T的任一可列稠密子集，因$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t^+}$，故定理 2 中的$\{y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是下鞅，由（11）知

$$x_t\leqslant y_t \qquad \text{a.e.}, \tag{20}$$

其次，对任意$t>0$，取$t_n\in D$，$t_n\downarrow t$，则因$\{x_{t_n}\}$一致可积及Ex_t右连续，故由§5.3定理 2 知

$$Ey_t=\lim_{n\to\infty}Ex_{t_n}=Ex_t. \tag{21}$$

由（20）和（21）得$x_t=y_t$ a.e.。换言之$\{y_t\}$是$\{x_t\}$的修正。

（b）⇒（a） 设$\{y_t\}$是$\{x_t\}$的右连续修正下鞅，则对任意$t_n\downarrow t$，因$\{x_{t_n}\}$一致可积，故$\{y_{t_n}\}$也一致可积。又$E|y_{t_n}|=E|x_{t_n}|<\infty$，因此，由附录（二）定理 2 得

$$\lim_{n\to\infty}Ex_{t_n}=\lim_{n\to\infty}Ey_{t_n}=Ey_t=Ex_t,$$

从而推知，Ex_t右连续。

系 若$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则任一$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$鞅必存在右连续修正鞅$\{y_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$。

证明 因为对一切s，t有$Ex_s=Ex_t$，故Ex_t右连续，再由定理 3 推出命题。

（二）收敛定理

§5.3中关于离散参数鞅的收敛定理，可直接推广到连续参数的场合，其证明完全相似，因此，下面我们只以定理 1 的证明作为例子，其它的只叙述结果而不再重证。

记

$$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t=\bigvee_{n=0}\mathscr{F}_{t_n},$$

其中 $t_n \uparrow \infty$。

定理 4 设$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$是右连续下鞅，如满足

$$\sup_{t \geq 0} E|x_t| < \infty \tag{22}$$

（或等价地，满足 $\sup\limits_{t \geq 0} Ex_t^+ < \infty$），则存在$\mathscr{F}_\infty$可积的随机变量$x_\infty$，使

$$P(\lim_{t \to \infty} x_t = x_\infty) = 1. \tag{23}$$

证明 令

$$A = \{\omega: \lim_{t \to \infty} x_t(\omega) \text{ 存在（有穷或} \pm \infty)\},$$

$$A(a, b) = \{\omega: \varliminf_{t \to \infty} x_t(\omega) < a < b < \varlimsup_{t \to \infty} x_t(\omega)\}.$$

记Q为全体有理数，显见

$$P(A^c) = P\{\bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in Q}} A(a, b)\}. \tag{24}$$

以下证明$P(A^c) = 0$，为此只需证明$P(A(a, b)) = 0$。

以V_a^b表示$\{x_t, t \in T\}$严格上穿区间$[a, b]$的次数，$V_a^b(D)$表示$\{x_t, t \in D\}$严格上穿区间$[a, b]$的次数，其中D为T中一可列稠密子集。因$\{x_t\}$右连续，故

$$V_a^b = V_a^b(D). \tag{25}$$

由定理 1 中的（1）式，有

$$EV_a^b(D) = \lim_{n \to \infty} EV_a^b(D \cap [0, n])$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{b - a}(Ex_n^+ + |a|)$$

$$\leq \frac{1}{b - a}(\sup_{t \geq 0} Ex_t^+ + |a|) < \infty.$$

由此及（25）可见 $EV_a^b < \infty$，从而

$$P(V_a^b < \infty) = 1. \tag{26}$$

由于 $A(a, b)\subseteq(V_0^b=\infty)$，故由（26）知

$$P(A(a, b))=0,$$

从而 $P(A^c)=0$，故 $P(A)=1$。这即表示 $\lim\limits_{t\to\infty} x_t$ 几乎处处存在。令

$$x_\infty=\lim_{t\to\infty} x_t.$$

由 $\{x_t\}$ 的右连续性知，x_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 可测。显然 $P(\lim\limits_{t\to\infty} x_t=x_\infty)=1$。对 $|x_t|$ 应用Fatou引理并注意条件（22），有

$$E|x_\infty|\leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} E|x_t|<\infty.$$

定理证毕。

定理 5 设 $\{x_t\}$ 为一致可积的右连续鞅（或下鞅），则存在 $\mathscr{F}_\infty$ 可测且可积的随机变量 x_∞，使得

（i）$x_t\to x_\infty$ a.e.，$E|x_t-x_\infty|\to 0$ （$t\to\infty$）；

（ii）对任一 $t\geqslant 0$

$$x_t=E(x_\infty|\mathscr{F}_t)(\text{或 } x_t\leqslant).$$

系 设 σ-代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续，Y 为一可积随机变数。如果 $\{x_t\}$ 是 $\{E(Y|\mathscr{F}_t)\}$ 的右连续修正，则当 $t\to\infty$ 时，有

$$x_t\to E(Y|\mathscr{F}_\infty)\ \text{a.e.},\ \text{且} E|x_t-E(Y|\mathscr{F}_\infty)|\to 0.$$

（三）例

布朗运动（即Wiener过程）的重对数定律是一个重要的定理，下面，我们将给出它的鞅证明，这也是鞅论应用于研究马氏过程理论的例子。

重对数定律 设 $\{x_t\}$ 是标准 1 维布朗运动，$P(x_0=0)=1$。则有

$$P(\lim_{t\downarrow 0}\ \sup_{t>0}\ (2t\log\log(1/t))^{-1/2}x_t=1)=1. \qquad (27)$$

证明 记 $h(t)=(2t\log\log(1/t))^{1/2}$， （28）

$$\mathscr{N}_t=\sigma(x_s,\ s\leqslant t).$$

由§5.1例3知，对任意实数α，$\{e^{\alpha x_t-\frac{1}{2}\alpha^2 t}, \mathscr{N}_t, t\in T\}$是鞅．以下恒考虑$\alpha>0$．令

$$Z_t=\exp\left(\alpha x_t-\frac{1}{2}\alpha^2 t\right). \tag{29}$$

由定理1的（ii），有

$$P\left\{\max_{s\leqslant t}\left(x_s-\frac{1}{2}\alpha s\right)>\beta\right\}=P\left(\max_{s\leqslant t}Z_s>e^{\alpha\beta}\right)$$

$$\leqslant e^{-\alpha\beta}EZ_t=e^{-\alpha\beta}. \tag{30}$$

（30）中最后一个等式成立是由于$EZ_t=EZ_0=1$之故。

取θ和δ，$0<\theta<1$，$0<\delta<1$。令$t=\theta^n$，$\alpha=\theta^{-n}$
$\cdot(1+\delta)h(\theta^n)$，$\beta=\frac{1}{2}h(\theta^n)$。

因为$h(\theta^n)=[2\theta^n\log\log(\theta^{-1})^n]^{1/2}$，故

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\theta^{-n}(1+\delta)h^2(\theta^n)=\frac{1}{2}(1+\delta)\theta^{-n}$$

$$\times\left[2\theta^n\log n+2\theta^n\log\log\frac{1}{\theta}\right]=(1+\delta)\log n$$

$$+(1+\delta)\log\log\frac{1}{\theta}=(1+\delta)\log n+c,$$

其中$c=(1+\delta)\log\log\frac{1}{\theta}$是一常数。

将这些数代入（30）式，得

$$P\left\{\max_{s\leqslant\theta^n}\left(x_s-\frac{1}{2}\alpha s\right)>\beta\right\}\leqslant e^c\cdot n^{-(1+\delta)}, \tag{31}$$

令

$$A_n=\left(\max_{s\leqslant\theta^n}\left(x_s-\frac{1}{2}\alpha s\right)>\beta\right),$$

则

$$\sum_n P(A_n) < \infty.$$

由Borel-Cantelli 引理知

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} A_k) = 0. \tag{32}$$

因此，对几乎每一个ω，存在$n_0(\omega)$，使得对一切$n \geqslant n_0(\omega)$，有

$$\max_{s\leqslant\theta^n}\left[x_s(\omega) - \frac{1}{2} s(1+\delta)\theta^{-n} h(\theta^n)\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2} h(\theta^n). \tag{33}$$

若 $n > \log\theta^{-1}$，又当$\theta^{n+1} < t < \theta^n$时，

$$2t \log\log\frac{1}{t} \geqslant 2\theta^{n+1}\log\log\theta^{-n}.$$

即

$$\theta^{-1/2} h(t) > h(\theta^n). \tag{34}$$

因此，对几乎每一个ω，当$n \geqslant \max(n_0(\omega), \log\theta^{-1})$ 及 $\theta^{n+1} < t \leqslant \theta^n$时，由（33）和（34）得

$$x_t(\omega) \leqslant \max_{s\leqslant t} x_s \leqslant \frac{1}{2}(2+\delta) h(\theta^n) \leqslant \frac{1}{2}\theta^{-1/2}$$

$$\times(2+\delta) h(t). \tag{35}$$

由（35）得

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup h^{-1}(t) x_t(\omega) \leqslant \frac{1}{2}\theta^{-1/2}(2+\delta). \tag{36}$$

令

$$\Omega_{\theta,\delta} = (\omega:(36)\text{ 式成立}).$$

由前面的推理过程知，$P(\Omega_{\theta,\delta}) = 1$。任取一列$\theta_n \uparrow 1$及$\delta_m \downarrow 0$并令

$$\Omega^* = \bigcap_{n,m} \Omega_{\theta_n, \delta_m},$$

有 $$P(\Omega^*)=1.$$

对$\omega\in\Omega^*$，有

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup h^{-1}(t)x_t(\omega)\leqslant\frac{1}{2}\theta_n^{-1/2}(2+\delta_m). \tag{37}$$

上式对一切n，m成立。

(37)中令$n\to\infty$和$m\to\infty$，得

$$P(\lim_{t\downarrow 0}\sup h^{-1}(t)x_t\leqslant 1)=1. \tag{38}$$

以下证明$P(\lim_{t\downarrow 0}\sup h^{-1}(t)x_t\geqslant 1)=1$。

以B_n表示集合：

$$B_n=\{\omega: x(\theta^n,\omega)-x(\theta^{n+1},\omega)\geqslant(1-\theta)^{1/2}h(\theta^n)\},$$

其中$0<\theta<1$，因布朗运动是独立增量过程，因此，$\{B_n\}$是独立事件列。又因$x(\theta^n)-x(\theta^{n+1})$服从$N(0,\sqrt{\theta^n-\theta^{n+1}})$正态分布，故有

$$P(B_n)=(2\pi)^{-1/2}\int_a^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}b^2\right)db$$

$$\geqslant(2\pi)^{-1/2}\int_a^\infty(1-3b^{-4})\exp\left(-\frac{1}{2}b^2\right)db$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}a^2\right)a^{-1}(1-a^{-2}), \tag{39}$$

其中 $$a=(1-\theta)^{1/2}h(\theta^n)(\theta^n-\theta^{n+1})^{-1/2}. \tag{40}$$

将$h(\theta^n)=(2\theta^n\log\log(\theta^{-n}))^{1/2}$代入(40)并化简，得

$$a=\sqrt{2}(\log n+\log\log(\theta^{-1}))^{1/2} \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}a^2=\log n+\log\log(\theta^{-1}). \tag{42}$$

由(39)，(41)和(42)得

$$P(B_n)=(2\pi)^{-1/2}(n\cdot\log(\theta^{-1}))^{-1}\cdot 2^{-1/2}(\log n+\log\log(\theta^{-1}))^{-1}\cdot[1-2^{-1}(\log n+\log\log(\theta^{-1}))^{-1}]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\log(\theta^{-1})}(n\log n+n\log\log(\theta^{-1}))}\cdot$$

$$\left[1-\frac{1}{2(\log n+\log\log(\theta^{-1}))}\right]. \tag{43}$$

由（43）可见，级数$\Sigma P(B_n)$与$\Sigma(n\log n)^{-1}$可比较，因此有$\Sigma P(B_n)$发散。再由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq 0}B_n)=1. \tag{44}$$

因此，对几乎一切ω（例外集依赖于θ）有

$$x(\theta^n)-x(\theta^{n+1})\geq(1-\theta)^{1/2}h(\theta^n), \tag{45}$$

对无穷多个n成立。

注意到$-X$也是布朗运动，对$-X$应用（38）式，当n充分大时有

$$-x(\theta^{n+1})<2h(\theta^{n+1}). \tag{46}$$

因

$$h(\theta^{n+1})=\sqrt{2\theta^{n+1}\log\log\theta^{-(n+1)}},$$

故当n充分大时

$$h(\theta^{n+1})\leq\sqrt{2\theta\theta^{n-1}\cdot 2\log\log\theta^{-n}}=2\theta^{1/2}h(\theta^n).$$

将上述关系式代入（46）式，得

$$-x(\theta^{n+1})<2h(\theta^{n+1})<4\theta^{1/2}h(\theta^n). \tag{47}$$

由（45）和（47）有

$$h^{-1}(\theta^n)x(\theta^n)\geq(1-\theta)^{1/2}-4\theta^{1/2}. \tag{48}$$

$$P(\lim_{n\to\infty}\sup h^{-1}(\theta^n)x(\theta^n))\geq(1-\theta)^{1/2}-4\theta^{1/2}=1. \tag{49}$$

因$\lim_{t\downarrow 0}\sup h^{-1}(t)x(t)\geq\lim_{n\to\infty}\sup h^{-1}(\theta^n)x(\theta^n)$，由（49）有

$$P(\lim_{t\downarrow 0}\sup h^{-1}(t)x(t)\geq(1-\theta)^{1/2}-4\theta^{1/2})=1. \tag{50}$$

取一列$\theta_m \downarrow 0$（$m\to\infty$）与（38）式的推导相同，在（50）式中以θ_m代替θ并令$m\to\infty$得

$$P(\limsup_{t\downarrow 0} h^{-1}(t)x(t)\geqslant 1)=1. \tag{51}$$

由（38）与（51）得到命题结论。该证明取材于[5]。类似的例子还可以在[5]中找到许多。

习　　题

1．证明定理2的系。

2．设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是可分下鞅，证明几乎所有的样本函数对一切$t\in T$有有穷的左右极限，且或者$x_t=x_{t^-}$或者$x_t=x_{t^+}$。

3．设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是依概率右连续的下鞅．证明$\{x_t\}$存在修正，它的轨道右连续且几乎所有的样本函数左极限存在。

4．设Y为可积随机变量，$x_t=E(Y|\mathscr{F}_t)$，$t\geqslant 0$．试问$\{x_t, t\geqslant 0\}$何时能有右连续修正过程？

*5．设对每一个n，$\{x_t^{(n)}, \mathscr{F}_t\}$是右连续非负上鞅，且对几乎一切$\omega$，有

对任意t，$x_t^{(n)}\uparrow x_t$。

如果对每一个t，x_t可积，那么$\{x_t, \mathscr{F}_t\}$是右连续上鞅。

6．设$\{x_t\}$为右连续鞅（或非负下鞅），令$p>1$，如果

$$\sup_{t\geqslant 0} E|x_t|^p<\infty,$$

则

(i) $\{x_t\}$一致可积；

(ii) 存在$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的x_∞，当$t\to\infty$时

$x_t\to x_\infty$ a．e．且$E|x_t-x_\infty|^p\longrightarrow 0$。

7．设$\{\xi_t\}$是右连续鞅．$c>0$是一给定的常数．求证：对任一$h>0$有

$$P\{\sup_{t\in T}\xi_t\geqslant h\}\leqslant \sup_{t\in T} Ee^{c\xi_t}/e^{ch}.$$

§5.5 Doob 停时定理、Riesz 分解和 Doob-Meyer 分解

（一）Doob停时定理

定义 1 称鞅（或下鞅）$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\in T\}$是右闭的，如存在$\mathscr{F}_\infty$可测且可积的随机变量$x_\infty$，使对一切$t\in T$有

$$E(x_\infty|\mathscr{F}_t)=x_t\ (\text{或}\geqslant x_t)。\qquad (1)$$

显然，鞅（或下鞅）$\{x_t\}$右闭的充要条件是存在可积的Y，对一切$t\in T$有

$$E(Y|\mathscr{F}_t)=x_t\ (\text{或}\geqslant x_t),$$

实际上，只需令$x_\infty=E(Y|\mathscr{F}_\infty)$，那么$x_\infty$便满足右闭定义的要求。

当T离散时，若$\{x_t\}$满足§5.3中定理2的条件，则$\{x_t\}$右闭．当T连续时，若$\{x_t\}$满足§5.4定理5的条件则$\{x_t\}$右闭．如$\{x_t\}$右闭且τ是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，我们定义

$$x_{\tau(\omega)}(\omega)=x_\infty(\omega),\ \text{如}\ \tau(\omega)=\infty。\qquad (2)$$

这样，x_τ对一切ω都有定义．如果$\{x_t\}$还右连续，那么x_τ是随机变数．

在§4.4（一）中已证明，如$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，τ_n是$\{\mathscr{F}_t\}$停时且$\tau_n\downarrow\tau$，则τ是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，且

$$\mathscr{F}_\tau=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n}。\qquad (3)$$

下面我们先证明离散参数时的Doob停时定理．然后证明连续参数的情形。它们是研究鞅论的重要工具。

定理 1 设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$是右闭鞅（或右闭下鞅），$\sigma$，$\tau$均为$\{\mathscr{F}_n\}$停时且$\sigma\leqslant\tau$，则

（i）x_σ，x_τ都可积，且$E(x_\infty|\mathscr{F}_\tau)=x_\tau$（或$\geqslant x_\tau$）；

（ii）$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=x_\sigma$（或$\geqslant x_\sigma$）。

证明 对任意Borel集Γ及$n\geqslant 0$有

$$(x_\tau\in\Gamma)\cap(\tau\leqslant n)=\bigcup_{k=0}^{n}(x_k\in\Gamma)\cap(\tau=k)\in\mathscr{F}_n,$$

因此$x_\tau\in\mathscr{F}_\tau$，同理$x_\sigma\in\mathscr{F}_\sigma$。

（一）$\{x_n\}$是右闭鞅的情形。

由（1）及条件期望的性质，有

$$\int_\Omega|x_\tau|P(d\omega)=\sum_n\int_{(\tau=n)}|x_n|P(d\omega)$$

$$\leqslant\sum_n\int_{(\tau=n)}|x_\infty|P(d\omega)=E|x_\infty|<\infty, \tag{4}$$

从而x_τ可积，同理x_σ可积。

对任$A\in\mathscr{F}_\tau$，由（1）有

$$\int_A x_\tau P(d\omega)=\sum_n\int_{A(\tau=n)}x_n P(d\omega)$$

$$=\sum_n\int_{A(\tau=n)}x_\infty P(d\omega)=\int_A x_\infty P(d\omega). \tag{5}$$

换言之，$E(x_\infty|\mathscr{F}_\tau)=x_\tau$，同理$E(x_\infty|\mathscr{F}_\sigma)=x_\sigma$。故（i）得证。往下证（ii），由（i）及$\mathscr{F}_\sigma\subset\mathscr{F}_\tau$可得

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=E[E(x_\infty|\mathscr{F}_\tau)|\mathscr{F}_\sigma]=E(x_\infty|\mathscr{F}_\sigma)=x_\sigma.$$

（二）$\{x_n\}$是右闭下鞅的情形

分解x_n为

$$x_n=E(x_\infty|\mathscr{F}_n)-y_n,\quad 0\leqslant n\leqslant\infty, \tag{6}$$

其中$y_n=E(x_\infty|\mathscr{F}_n)-x_n$。易证$\{y_n,\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant 0\}$是非负上鞅且$y_\infty=E(x_\infty|\mathscr{F}_\infty)-x_\infty=0$。因$y_n$非负，故$E(0|\mathscr{F}_n)=0\leqslant y_n$，$n\geqslant 0$，这说明$\{y_n\}$还是右闭的。

记　$\pi_n=E(x_\infty|\mathscr{F}_n)$，$n\geqslant 0$，则$\{\pi_n,\ \mathscr{F}_n,\ n\geqslant 0\}$是右闭鞅。故据上面（一）所证，$\{\pi_n\}$满足（i）和（ii）。因此，如果

我们能证$\{y_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$也满足相应的（i）和（ii），则由（6）式即可证明定理成立。

与x_τ一样，易知y_τ是$\mathscr{F}_\tau$可测的。又因$y_\infty=0$ a.e.

故
$$y_\tau=y_\tau I_{\tau<\infty}+y_\infty I_{\tau=\infty}=y_\tau I_{\tau<\infty} \quad \text{a.e.} \tag{7}$$
$$Ey_\tau=E\lim_{n\to\infty} y_{\tau\wedge n}I_{\tau<n}\leqslant E\lim_{n\to\infty} y_{\tau\wedge n},$$

由Fatou引理，上式
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} Ey_{\tau\wedge n}. \tag{8}$$

因0及$\tau\wedge n$是有界停时，且$0\leqslant\tau\wedge n$。故由§5.2定理1知（8）式右方不大于Ey_0，从而$0\leqslant Ey_\tau<\infty$。显然$0=E(y_\infty|\mathscr{F}_\tau)\leqslant y_\tau$，故（i）成立，下证$\{y_n\}$满足（ii），令

$$\tau_k=\tau\wedge k,\ \sigma_k=\sigma\wedge k \quad k=0,1,2,\cdots,$$

则τ_k，σ_k都是有界停时，且$\sigma_k\leqslant\tau_k$。任取$A\in\mathscr{F}_\sigma$，由于$A\cap(\sigma\leqslant k)\in\mathscr{F}_{\sigma_k}$，由§5.2定理1，我们有

$$\int_{A(\sigma\leqslant k)} y_{\tau_k}P(d\omega)\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)} y_{\sigma_k}P(d\omega), \tag{9}$$

但$(\tau\leqslant k)\subset(\sigma\leqslant k)$，又$y_n\geqslant 0$ a.e.，所以

$$\int_{A(\tau\leqslant k)} y_{\tau_k}P(d\omega)\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)} y_{\sigma_k}P(d\omega). \tag{10}$$

注意在$(\tau\leqslant k)$上$\tau=\tau_k$，在$(\sigma\leqslant k)$上$\sigma=\sigma_k$，于是由（10）得

$$\int_{A(\tau\leqslant k)} y_\tau P(d\omega)\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)} y_\sigma P(d\omega).$$

在上式中令$k\to\infty$得

$$\int_{A(\tau<\infty)} y_\tau P(d\omega)\leqslant\int_{A(\sigma<\infty)} y_\sigma P(d\omega). \tag{11}$$

注意到$y_\infty=0$ a.e.，由（11）有

$$\int_A y_\tau P(d\omega)\leqslant\int_A y_\sigma P(d\omega).$$

换言之，$E(y_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant y_\sigma$，于是由（6）

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=E(\pi_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-E(y_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant\pi_\sigma-y_\sigma=x_\sigma.$$

定理证毕.

定理 2 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$为右连续右闭下鞅（或鞅）且$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则对任意$\{\mathscr{F}_t\}$停时$\sigma$，$\tau$，$\sigma\leqslant\tau$有

（i）x_σ，x_τ可积；

(ii) $E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\geqslant x_\sigma$（或$=x_\sigma$）. (12)

证明 设x_∞为（1）中的可积随机变量且$\{x_t\}$是下鞅.

第一步 证明x_σ和x_τ分别为$\mathscr{F}_\sigma$和$\mathscr{F}_\tau$可测。为此，对每一$n\geqslant 0$，定义

$$\sigma_n(\omega)=\begin{cases}\frac{k}{2^n}, & \text{如}\frac{k-1}{2^n}\leqslant\sigma(\omega)<\frac{k}{2^n},\\ & k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\\ \infty, & \text{如}\sigma(\omega)=\infty,\end{cases}$$

$$\tau_n(\omega)=\begin{cases}\frac{k}{2^n}, & \text{如}\frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau(\omega)<\frac{k}{2^n},\\ & k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\\ \infty, & \text{如}\tau(\omega)=\infty.\end{cases}$$

则$\sigma_n(\omega)\leqslant\tau_n(\omega)$ 且$\sigma_n\downarrow\sigma$，$\tau_n\downarrow\tau$. (13)

对固定的n，$\{x_{\frac{k}{2^n}}, \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}, k\geqslant 0\}$是右闭下鞅，且$\sigma_n$，$\tau_n$都是$\{\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}, k\geqslant 0\}$停时，定义

$$x_{\sigma_n}(\omega)=x_\infty(\omega),\ \text{如}\ \sigma_n(\omega)=\infty,$$

于是x_{σ_n}是$\mathscr{F}_{\sigma_n}$可测的。因为（13）及$\{x_t\}$的右连续性，故对一切ω有

$$\lim_{n\to\infty}x_{\sigma_n}(\omega)=x_\sigma(\omega). \qquad (14)$$

又因$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，由(3)式可知x_σ是关于$\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}=\mathscr{F}_\sigma$可测，同理，$x_\tau$是关于$\mathscr{F}_\tau$可测。

第二步 证明 x_σ, x_τ 可积.

因为 $\mathscr{F}_{\frac{k}{2^{n+1}}}\subset\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}$，所以 σ_n 和 σ_{n+1} 都是 $\{\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}},\ k\geq 0\}$ 停时。又因 $\sigma_n\geq\sigma_{n+1}$，故由定理 1 知

$$E|x_{\sigma_n}|<\infty,\quad E(x_{\sigma_n}|\mathscr{F}_{\sigma_{n+1}})\geq x_{\sigma_{n+1}},\quad n\geq 0. \tag{15}$$

可见，$\{x_{\sigma_n},\ \mathscr{F}_{\sigma_n},\ n\geq 0\}$ 是反向下鞅。

由（15）有

$$Ex_{\sigma_n}\geq Ex_{\sigma_{n+1}},\quad n\geq 1. \tag{16}$$

因 $0\leq\sigma_n$，再由定理 1 有

$$E(x_{\sigma_n}|\mathscr{F}_0)\geq x_0. \tag{17}$$

由（16）和（17）有

$$Ex_0\leq Ex_{\sigma_n}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}Ex_{\sigma_n}\geq Ex_0>-\infty. \tag{18}$$

于是，由 § 5.3定理 4 及（14）知，x_σ 可积且

$$\lim_{n\to\infty}E|x_{\sigma_n}-x_\sigma|=0. \tag{19}$$

同理可证 x_τ 可积且

$$\lim_{n\to\infty}E|x_{\tau_n}-x_\tau|=0. \tag{20}$$

第三步 证明（12）式成立。

在第一步中已指出 $\{x_{\frac{k}{2^n}},\ k\geq 0\}$ 是右闭下鞅，τ_n，σ_n 都是 $\{\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}\}$ 停时且 $\sigma_n\leq\tau_n$。因而由定理 1 知

$$E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_{\sigma_n})\geq x_{\sigma_n}. \tag{21}$$

对任一 $B\in\mathscr{F}_\sigma$，因 $\mathscr{F}_\sigma\subset\mathscr{F}_{\sigma_n}$，所以由（21）得

$$\int_B x_{\tau_n}P(d\omega)\geq\int_B x_{\sigma_n}P(d\omega).$$

令 $n\to\infty$，由（19）和（20）得

$$\int_B x_\tau P(d\omega)\geq\int_B x_\sigma P(d\omega). \tag{22}$$

此即（12）式。

如$\{x_t\}$是鞅，类似于上述证明可得所需结论。我们把它留作习题，让读者自己证明。

系 条件与定理1，2相同，则对任意$\{\mathscr{F}_t, t\in T\}$停时$\sigma$，$\tau$有

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=x_{\tau\wedge\sigma} \quad (\text{或}\geqslant x_{\tau\wedge\sigma}). \tag{23}$$

证明 只证鞅的情况。

由定理1和2知，对任一停时τ，x_τ是$\mathscr{F}_\tau$可测。因

$$x_\tau=I_{\tau\geqslant\sigma}x_\tau+I_{\tau<\sigma}x_\tau=I_{\tau\geqslant\sigma}x_\tau+I_{\tau<\sigma}x_{\tau\wedge\sigma}. \tag{24}$$

由停时性质（见§4.5习题4）知$(\tau<\sigma)\in\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}\subseteq\mathscr{F}_\sigma$因此

$$E(I_{\tau<\sigma}x_{\sigma\wedge\tau}|\mathscr{F}_\sigma)=I_{\tau<\sigma}x_{\sigma\wedge\tau}. \tag{25}$$

再由§4.5习题5有

$$E(I_{\tau\geqslant\sigma}x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=I_{\tau\geqslant\sigma}E(x_\tau|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}), \tag{26}$$

因$\tau\wedge\sigma\leqslant\tau$故由定理1和2有

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})=x_{\tau\wedge\sigma},$$

故（26）式右方为

$$I_{\tau\geqslant\sigma}x_{\tau\wedge\sigma}. \tag{27}$$

结合（25）和（27）由（24）得

$$E(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=I_{\tau<\sigma}x_{\sigma\wedge\tau}+I_{\tau\geqslant\sigma}x_{\sigma\wedge\tau}=x_{\tau\wedge\sigma}.$$

引理得证。

（二）Riesz 分解和 Doob-Meyer分解

Doob-Meyer 及Riesz 分解定理指出了半鞅与鞅的关系，它使我们能对半鞅的某些问题的研究化为对鞅的研究。关于这两个定理，仍然先考虑离散参数的情形。

定义2 称适应过程$\{z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$为增过程，如果满足

（i）$0=z_0\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots$ a.e.；

（ii）$Ez_n<\infty$ $n\geqslant 0$.

称增过程为自然增过程，如它还满足

(iii) z_{n+1} 是 $\mathscr{F}_n$ 可测 $n \geqslant 0$。

由定义可知，增过程是非负的，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_\infty$ 存在。但可能取 ∞。容易看出，z_∞ 可积的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} E z_n < \infty$，因（i），这条件等价于 $\{z_n, \ n \geqslant 0\}$ 一致可积（见附录（二）定理 2），由定义还可知自然增过程必是下鞅。

定理 3（**Doob分解定理**）任一下鞅 $\{x_n, \ \mathscr{F}_n, \ n \geqslant 0\}$ 可唯一地（在随机等价意义下）分解为

$$x_n = y_n + z_n, \quad n \geqslant 0, \tag{28}$$

其中 $\{y_n, \ \mathscr{F}_n\}$ 为鞅，$\{z_n, \ \mathscr{F}_n\}$ 是自然增过程。

证明 令

$$z_0 = 0,$$
$$z_1 = E(x_1 | \mathscr{F}_0) - x_0,$$
$$\vdots$$

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} [E(x_k | \mathscr{F}_{k-1}) - x_{k-1}]. \tag{29}$$

易知，z_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测。由下鞅性

$$E(x_k | \mathscr{F}_{k-1}) - x_{k-1} \geqslant 0,$$

故 $z_n \geqslant 0$ 且

$$z_{n+1} = z_n + E(x_{n+1} | \mathscr{F}_n) - x_n \geqslant z_n \geqslant 0 \quad \text{a.e.}. \tag{30}$$

由（29）式有

$$0 \leqslant E z_n = \sum_{k=1}^{n} (E x_k - E x_{k-1}) < \infty.$$

可见 $\{z_n, \ \mathscr{F}_n\}$ 是自然增过程。定义

$$y_n = x_n - z_n, \quad n \geqslant 0, \tag{31}$$

则 $\{y_n, \ \mathscr{F}_n\}$ 是鞅。实际上，y_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测且 $E|y_n| < \infty$。又

$$E(y_n|\mathscr{F}_{n-1})=E(x_n|\mathscr{F}_{n-1})-\sum_{k=1}^{n}\{E[E(x_k|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_{n-1}]-$$

$$E(x_{k-1}|\mathscr{F}_{n-1})\}=E(x_n|\mathscr{F}_{n-1})-\sum_{k=1}^{n-1}[E(x_k|\mathscr{F}_{k-1})-x_{k-1}]-$$

$$E(x_n|\mathscr{F}_{n-1})+x_{n-1}=x_{n-1}-z_{n-1}=y_{n-1}.$$

下证分解式（28）是唯一的。设另有分解式

$$x_n=y'_n+z'_n,$$

则得

$$y_n-y'_n=z'_n-z_n. \tag{32}$$

因$\{y_n-y'_n,\ \mathscr{F}_n\}$是鞅。又因（32），$y_n-y'_n$是$\mathscr{F}_{n-1}$可测，则

$$y_n-y'_n=y_0-y'_0\quad \text{a.e.},\quad n\geqslant 0,$$

从而由$z_0=z'_0=0$得

$$y_n-y'_n=0\quad \text{a.e.},$$

故由（32）$y_n=y'_n$ a.e.，$z_n=z'_n$ a.e.，$n\geqslant 0$。

如果$\{x_n,\ \mathscr{F}_n\}$是上鞅，则$\{-x_n,\ \mathscr{F}_n\}$是下鞅，应用Doob-Meyer分解定理，即可把$\{x_n\}$分解成

$$x_n=y'_n-z_n,\quad n\geqslant 0, \tag{33}$$

其中$\{y'_n,\ \mathscr{F}_n\}$是鞅，$\{z_n,\ \mathscr{F}_n\}$是自然增过程。

系1 设$\{x_n,\ \mathscr{F}_n\}$是下鞅，如$\sup\limits_{n\geqslant 0}E|x_n|<\infty$（或$\{x_n\}$一致可积），则Doob-Meyer分解定理中的$\{y_n\}$和$\{z_n\}$也有$\sup\limits_{n\geqslant 0}E|y_n|<\infty$，$\sup\limits_{n\geqslant 0}Ez_n<\infty$（或$\{y_n\}$，$\{z_n\}$一致可积）。

证明 由（28），注意$\{y_n\}$是鞅，得

$$Ez_n\leqslant E|x_n|-Ey_n=E|x_n|-Ey_0.$$

因$z_n\geqslant 0$，故当$\sup\limits_{n\geqslant 0}E|x_n|<\infty$时，$\sup\limits_{n}Ez_n<\infty$。同理，由

$$E|y_n| \leqslant E|x_n| + Ez_n \tag{34}$$

即知 $\sup\limits_n E|y_n| < \infty$。

如$\{x_n\}$一致可积，由附录（二）定理1，$\sup\limits_n E|x_n| < \infty$。从而 $\sup\limits_n Ez_n < \infty$。如同前述，由$\{z_n\}$是增过程及附录(二) 定理2知 $\{z_n\}$一致可积，因而由（34）$\{y_n\}$也一致可积。

定义 3 称非负上鞅$\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$为一**位势**。如果

$$\lim_{n\to\infty} Ex_n = 0。\tag{35}$$

注意 如$\{x_n\}$是位势，因 $\sup\limits_n E|x_n| < \infty$，由§5.3定理1知，存在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ a.e.，其中$Ex_\infty < \infty$。但由(35)，$Ex_\infty \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} Ex_n = 0$，可见 $x_\infty = 0$，a.e.。从而，如$\{x_n\}$是位势，那么，由附录（二）定理2知$\{x_n\}$一致可积。

系 设$\{x_n, \mathscr{F}_n\}$是位势，则存在自然增过程$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$，使

$$x_n = E(z_\infty | \mathscr{F}_n) - z_n, \tag{36}$$

其中 $z_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$。

证明 因$\{-x_n\}$是下鞅，故由Doob-Meyer分解，可将$\{x_n\}$表成

$$x_n = y_n - z_n,$$

其中$\{y_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅，$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$是自然增过程。今证

$$y_n = E(z_\infty | \mathscr{F}_n)。$$

因 $0 \leqslant z_n = y_n - x_n \leqslant y_n$，所以

$$Ez_n \leqslant Ey_n = Ey_1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} Ez_n < \infty$。于是 $\{z_n\}$ 一致可积且$Ez_\infty < \infty$。又$\{x_n\}$是位势，因此一致可积。从而$\{y_n\}$一致可积。于是由§5.3定理2，存在可积的 y_∞，使

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_\infty, \quad E(y_\infty|\mathscr{F}_n) = y_n,$$

但

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - z_n) = y_\infty - z_\infty \quad \text{a.e.},$$

故 $y_\infty = z_\infty$ a.e.，从而

$$y_n = E(z_\infty|\mathscr{F}_n).$$

如对上鞅 $\{x_n\}$ 附加条件（见（37)式），则利用 Doob-Meyer 分解可得到：

定理 4 （**Riesz分解**）设 $\{x_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为上鞅，则当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} Ex_n > -\infty \tag{37}$$

时，$\{x_n\}$ 可唯一地（在随机等价意义下）分解为

$$x_n = y_n + z_n, \tag{38}$$

其中 $\{y_n, \mathscr{F}_n\}$ 为鞅，$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$ 是位势。

证明 必要性。由（38)，$Ex_n = Ey_n + Ez_n = Ey_1 + Ez_n$，故由（35）知 $\lim\limits_{n\to\infty} Ex_n > -\infty$。

充分性。设（37）成立，由Doob-Meyer 分解定理

$$x_n = y_n' - z_n', \quad n \geqslant 0, \tag{39}$$

其中 $\{y_n', \mathscr{F}_n\}$ 是鞅，$\{z_n', \mathscr{F}_n\}$ 是自然增过程。由

$$Ez_n' = Ey_n' - Ex_n = Ey_1' - Ex_n \leqslant Ey_1' - \lim_{n\to\infty} Ex_n$$

及（37）知，$\sup\limits_n Ez_n' < \infty$，故由 § 5.3 定理 1，存在 $\mathscr{F}_\infty$ 可测且可积的 z_∞'，使

$$\lim_{n\to\infty} z_n' = z_\infty' \quad \text{a.e.}.$$

令

$$y_n = y_n' - E(z_\infty'|\mathscr{F}_\infty), \; z_n = E(z_\infty'|\mathscr{F}_n) - z_n'.$$

由（39）得

$$y_n+z_n=y'_n-z'_n=x_n.$$

往下证$\{y_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅，$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$是位势。

实际上，因$\{y'_n, \mathscr{F}_n\}$及$\{E(z'_\infty|\mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n\}$都是鞅，故$\{y_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅，其次，因$z'_n\uparrow z'_\infty$，故$z'_n\leqslant z'_\infty$。从而$z'_n\leqslant E(z'_\infty|\mathscr{F}_n)$，可见$z_n\geqslant 0$。又因

$$E(z_n|\mathscr{F}_{n-1})=E(z'_\infty|\mathscr{F}_{n-1})-E(z'_n|\mathscr{F}_{n-1}),$$

而z'_n是$\mathscr{F}_{n-1}$可测，由$z'_n\geqslant z'_{n-1}$，故

$$E(z_n|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant E(z'_\infty|\mathscr{F}_{n-1})-z'_{n-1}=z_{n-1},$$

即$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$是上鞅。此外，当$n\to\infty$时

$$Ez_n=Ez'_\infty-Ez'_n\to Ez'_\infty-Ez'_\infty=0.$$

可见$\{z_n, \mathscr{F}_n\}$是位势。

唯一性，设$x_n=r_n+s_n$是$\{x_n\}$的另一Riesz分解。则

$$y_n-r_n=s_n-z_n \quad \text{a.e.}. \tag{40}$$

$\{y_n-r_n, \mathscr{F}_n\}$是鞅，且由（40）式$E|y_n-r_n|\leqslant Es_n+Ez_n\to 0$ $(n\to\infty)$。故由附录（二）定理2，$\{y_n-r_n\}$一致可积。由§5.3定理2得知

$$y_n-r_n=0 \qquad \text{a.e.}.$$

从而由（40），$y_n=r_n$，$s_n=z_n$ a.e.，定理证毕。

定义4 称轨道右连续的非负上鞅$\{\pi_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$为位势，如果

$$\lim_{t\to\infty} E\pi_t=0. \tag{41}$$

由定义可知，如$\{\pi_t\}$是位势，则$\lim\limits_{t\to\infty}\pi_t=0$ a.e.。这是因为$\sup\limits_{t\geqslant 0} Ex_t\leqslant E\pi_0<\infty$，因而根据§5.4定理4，存在可积的$\pi_\infty$，使

$$\lim_{t\to\infty}\pi_t=\pi_\infty \quad \text{a.e.},$$

于是由Fatou引理知，$E\pi_\infty\leqslant \lim\limits_{t\to\infty} E\pi_t=0$，从而$\pi_\infty=0$ a.e.，

定理 5 （Riesz 分解）设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为右连续上鞅，如果$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，则当且仅当

$$\lim_{t \to \infty} E x_t > -\infty \tag{42}$$

时，x_t可唯一地（在随机等价意义下）分解为

$$x_t = y_t + \pi_t, \quad t \geqslant 0, \tag{43}$$

其中$\{y_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为鞅，$\{\pi_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$是位势。

证明 必要性。由（43）

$$E x_t = E y_t + E \pi_t = E y_0 + E \pi_t.$$

令$t \to \infty$，因$\{\pi_t\}$是位势，故（42）得证。

充分性。设（42）成立，对任意$t, s \geqslant 0$。令

$$M_{t,s} = E(x_{t+s}|\mathscr{F}_t), \tag{44}$$

可见，对任一固定的t，$M_{t,s}$是$\mathscr{F}_t$可测且可积的。又

$$M_{t,n+1} = E\{E(x_{t+n+1}|\mathscr{F}_{t+n})|\mathscr{F}_t\}$$
$$\leqslant E(x_{t+n}|\mathscr{F}_t) = M_{t,n},$$

故对几乎所有的ω，$\lim\limits_{n \to \infty} M_{t,n}^{(\omega)}$存在。令

$$M_t = \varliminf_{n \to \infty} M_{t,n},$$

则M_t是$\mathscr{F}_t$可测，且

$$M_t = \lim_{n \to \infty} M_{t,n} \quad \text{a.e.}. \tag{45}$$

注意对$h > 0$，由于$M_{t,n+h} \leqslant M_{t,n}$，故由（45）也有

$$M_t = \lim_{n \to \infty} M_{t,n+h} \quad \text{a.e.}, \tag{46}$$

由（42）有

$$\lim_{n \to \infty} E M_{t,n} = \lim_{n \to \infty} E x_{t+n} > -\infty,$$

因此，由单调收敛定理得

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} E(M_{t,0} - M_{t,n}) = E(M_{t,0} - M_t) < \infty,$$

故M_t可积，且

$$EM_t = \lim_{n\to\infty} EM_{t,n} = \lim_{n\to\infty} Ex_{t+n}, \tag{47}$$

又 $E|M_{t,n}-M_t| = EM_{t,n} - EM_t \to 0\ (n\to\infty)$。

因此，我们有，对 $t>s$，

$$E(M_t|\mathscr{F}_s) = E(\lim_{n\to\infty} M_{t,n}|\mathscr{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(M_{t,n}|\mathscr{F}_s)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E(x_{t+n}|\mathscr{F}_s) = \lim_{n\to\infty} M_{s,(n+t-s)},$$

由 (46)，上式右方为

$$M_s.$$

可见$\{M_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$是鞅。因为$\{\mathscr{F}_t\}$右连续。故由§5.4定理3之系知。$\{M_t\}$有右连续修正鞅。仍记此修正鞅为$\{M_t\}$。定义

$$\pi_t = x_t - M_t, \quad t\geqslant 0, \tag{48}$$

则$\{\pi_t, \mathscr{F}_t\}$是位势。$\{\pi_t\}$的样本函数右连续是显然的。此外，由(44)知，$M_{t,n}\leqslant x_t$，因而$M_t\leqslant x_t$。由(48)知$\pi_t\geqslant 0$。其次对任意$t>s$，

$$E(\pi_t|\mathscr{F}_s) = E(x_t|\mathscr{F}_s) - E(M_t|\mathscr{F}_s)$$

$$\leqslant x_s - M_s = \pi_s.$$

此外，由(47)我们有

$$E\pi_t = \lim_{n\to\infty} E(x_t - M_{t,n}) = \lim_{n\to\infty} E(x_t - x_{t+n})$$

$$= Ex_t - \lim_{t\to\infty} Ex_t.$$

从而，$\lim_{t\to\infty} E\pi_t = 0$。

故$\{\pi_t\}$是位势。

唯一性。设

$$x_t = r_t + s_t, \quad t\geqslant 0$$

为x_t的另一Riesz分解，其中$\{r_t\}$为鞅，$\{s_t\}$是位势。则

$$M_t - r_t = \pi_t - s_t, \quad t\geqslant 0, \tag{49}$$

$\{x_t - r_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$为鞅，且由(49)知

$$E|M_t - r_t| \leqslant E\pi_t + Es_t \to 0 \quad (t\to\infty), \tag{50}$$

故由附录（二）定理 2，$\{M_t-r_t,\ t\geq 0\}$一致可积．由 § 5.4定理 5 并注意（50）式，得到

$$M_t-r_t=0 \quad \text{a.e.} \quad t\geq 0.$$

从而$M_t=r_t$ a.e.，由（49）$\pi_t=s_t$ a.e.，定理证毕。

连续参数情况的 Doob-Meyer 分解是随机积分不可缺少的内容。但因该定理的证明难度较大，为了证明它尚需引进一些其它新的概念，超过了本书的范围．故在此不作介绍了，有兴趣的读者可参看〔4〕和〔6〕。

（三）例

设$x=\{x_t,\ t\geq 0\}$是布朗运动且是标准马氏过程，$\mathcal{N}_t=\sigma(x_s,\ s\leq t)$。$\tau$是$\{\mathcal{N}_t\}$停时。若对$x\in R_1$有$E_x\tau<\infty$。则$E_x x(\tau)=x$且$E_x|x_\tau-x|^2=E_x\tau$。

证明 由 § 5.1例 3 知$\{x_t,\ \mathcal{N}_t\}$和$\{x_t^2-t,\ \mathcal{N}_t\}$关于$P_x$都是鞅。$0\leq\tau\wedge t\leq t$，对$0$，$\tau\wedge t$用有界停时定理得

$$E_x x(t\wedge\tau)=E_x x(0)=x, \tag{51}$$

$$E_x x^2(t\wedge\tau)-E_x(t\wedge\tau)=x^2, \tag{52}$$

由（51）和（52）得

$$E_x|x(t\wedge\tau)-x|^2=E_x(t\wedge\tau). \tag{53}$$

因X轨道是连续的，故

$$\lim_{t\to\infty} x(t\wedge\tau)=x(\tau). \tag{54}$$

下证$x(t\wedge\tau)$均方收敛于$x(\tau)$。对任意s，$t\geq 0$，

$$\begin{aligned}E_x|x(t\wedge\tau)-x(s\wedge\tau)|^2 &=E_x x^2(t\wedge\tau)+E_x x^2(s\wedge\tau)\\ &\quad -2E_x x(t\wedge\tau)x(s\wedge\tau).\end{aligned} \tag{55}$$

若$t\geq s$，

$$\begin{aligned}E_x x(t\wedge\tau)x(s\wedge\tau)&=E_x x(s\wedge\tau)E_x(x(t\wedge\tau)|\mathscr{F}_{s\wedge\tau})\\ &=E_x x^2(s\wedge\tau),\end{aligned} \tag{56}$$

若$s<t$，

$$E_x x(t\wedge\tau)x(s\wedge\tau)=E_x x^2(t\wedge\tau). \tag{57}$$

由（55),（56）和（57）得

$$E_x|x(t\wedge\tau)-x(s\wedge\tau)|^2=|E_x x^2(t\wedge\tau)-E_x x^2(s\wedge\tau)|. \tag{58}$$

由（52）上式右方为 $|E_x(t\wedge\tau)-E_x(s\wedge\tau)|$.

因 $E_x\tau<\infty$，故

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t\to\infty}} E_x|x(t\wedge\tau)-x(s\wedge\tau)|^2=0. \tag{59}$$

（59）式说明当 $t\to\infty$时 $x(t\wedge\tau)$ 均方收敛。由（54）推知，$x(t\wedge\tau)$ 均方收敛于 $x(\tau)$，即

$$\lim_{t\to\infty} E_x|x(t\wedge\tau)-x(\tau)|^2=0. \tag{60}$$

由（60）有

$$\lim_{t\to\infty} E_x x(t\wedge\tau)=E_x x(\tau). \tag{61}$$

由（51）和（61）得证

$$E_x x(\tau)=x. \tag{62}$$

由（60）有

$$\lim_{t\to\infty} E_x|x(t\wedge\tau)-x|^2=E_x|x(\tau)-x|^2. \tag{63}$$

由（63）和（53）得

$$E_x|x(\tau)-x|^2=E_x\tau$$

由该例的结果，很容易得到如下事实：

若 $a<x<b$，$B=R_1\setminus(a,b)$，

$$\tau_B=\begin{cases}\inf(s>0,\ x_s\in B),\\ \infty,\ \text{如上集空}.\end{cases}$$

因X轨道是连续的，易证 τ_B 是$\{\mathscr{N}_t\}$停时。且

$$P_x(x(\tau_B)=b)=(x-a)/(b-a),$$

$$P_x(x(\tau_B)=a)=(b-x)/(b-a),$$

$$E_x(\tau_B)=(x-a)(b-x)。$$

具体计算留作习题（$E_x\tau_B<\infty$，见§6.4）。

习　题

1．设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$是右连续、右闭鞅，又$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，证明定理2中各结论。

2．设$X=\{x_t, t\geqslant 0\}$是标准1维Brownian motion，若$a<x<b$，$B=R^1\setminus(a,b)$，

令
$$\tau_B=\begin{cases}\inf(s>0, x_s\in B),\\ \infty, \text{如上集空。}\end{cases}$$

求证

$$P_x(x(\tau_B)=b)=(x-a)/(b-a),$$
$$E_x(\tau_B)=(x-a)(b-x)。$$

3．设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$为下鞅，满足条件$\sup\limits_n Ex_n^+<\infty$，记$x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ a.e.，则$\{x_n\}$，$0\leqslant n\leqslant\infty$是下鞅的充要条件为随机序列$\{x_n^+, n\geqslant 0\}$一致可积。

4．设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$是鞅，$\tau$是$\{\mathscr{F}_n\}$停时且$P(\tau<\infty)=1$。如果$E\{\sup\limits_{n\geqslant 0}|x(\tau\wedge n)|\}<\infty$，证明

$$Ex(\tau)=Ex_1。$$

5．设$y_0, y_1, \cdots$是独立同分布的随机变量$Ey_k=\mu$，$\mathrm{Var}(y_k)=\sigma^2<\infty$，令$S_n=y_0+y_1+\cdots+y_n$，

$$x_n=S_n-(n+1)\mu,\quad n=0,1,2,\cdots。$$

又设τ是$\{\mathscr{F}_n\}$有限停时，这里$\mathscr{F}_n=\sigma(x_0, x_1, \cdots, x_n)$。试证，如$E\tau<\infty$，则（i）$E|x_\tau|<\infty$，（ii）$Ex_\tau=0$。

6．设有甲乙两个赌徒，甲每局胜负的概率均为1/2。每局规定赌1元，假定各局赌博是彼此独立的。试用第4题求甲得到b元之前先输a元的概率。

7．设$\{x_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$为非负上鞅，证明$x_n$可分解为

$$x_n=y_n+z_n,\quad n\geqslant 0,$$

其中$\{y_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$为鞅，$\{z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$为非负上鞅，且$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$。

8. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为鞅，$\tau$是$\{\mathscr{F}_t\}$停时．如$\{x_t\}$右连续，证明$\{x_{t\wedge\tau}, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$也是鞅。

9. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为右连续上鞅且$x_t \geqslant E(Y|\mathscr{F}_t)$，$t \geqslant 0$，其中$E|Y|<\infty$。又设$\tau_n$是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots$，证明如$\{\mathscr{F}_t\}$右连续．则$\{x_{\tau_n}, n \geqslant 0\}$一致可积。

10. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为右连续鞅且$x_t = E(Y|\mathscr{F}_t)$ a．e．．证明对任一$\{\mathscr{F}_t\}$停时τ，有

$$x_\tau = E(Y|\mathscr{F}_\tau)。$$

11. 设子σ代数流$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，Y为一可积随机变量，σ和τ为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，证明

$$E\{E(Y|\mathscr{F}_\tau)|\mathscr{F}_\sigma\} = E\{E(Y|\mathscr{F}_\sigma)|\mathscr{F}_\tau\} = E(Y|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})。$$

12. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为右连续鞅，以$S_a$表示满足$\tau \leqslant a$的$\{\mathscr{F}_t\}$停时$\tau$的全体，则对任意$0 \leqslant a < \infty$，$\{x_\tau, \tau \in S_a\}$一致可积。

13. 设$\{x_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$为右连续鞅，$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，$H = \{\tau : \tau$是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，且$P(\tau < \infty) = 1\}$。试证如$\{x_t\}$一致可积，则$\{x_\tau, \tau \in H\}$也一致可积。

第六章　平稳独立增量过程

§6.1　定义及例子

定义 1　称实值随机过程$X=\{x_t\}_{t\geq 0}$为平稳独立增量过程，如果下列条件满足：

（i）它是独立增量过程。即对任意$0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$n\geqslant 1$，$x_{t_0}$，$x_{t_1}-x_{t_0}$，…，$x_{t_n}-x_{t_{n-1}}$相互独立；

（ii）对任意t，$s\geqslant 0$，$x_{t+s}-x_s$与x_t-x_0同分布。

在第四章§2中已经证明独立增量过程是马氏过程。本节将进一步讨论平稳独立增量过程与时空齐次马氏过程的关系。

定义 2　称实值随机过程$\eta=\{\eta_t\}_{t\geq 0}$是时空齐次的马氏过程，如果它是齐次马氏过程且其转移函数$P(t,x,\Gamma)$，$t\geqslant 0$，$x\in E(R_1)$，$\Gamma\in(\mathscr{B}_1)$还满足：

对任意x_0，$x\in E$，$t\geqslant 0$及$\Gamma\in\mathscr{B}$有

$$P(t,x_0+x,\Gamma+x_0)=P(t,x,\Gamma).\tag{1}$$

设$X=\{x_t\}_{t\geq 0}$是平稳独立增量过程，令

$$P(t,x,\Gamma)=P((x_t-x_0+x)\in\Gamma)\tag{2}$$

引理 1　由（2）定义的$P(t,x,\Gamma)$，$x\geqslant 0$，$t\in E$，$\Gamma\in\mathscr{B}$是齐次转移函数且满足（1）。

证明　只需逐一验证§4.3中条件（a）—（b）。由（2）式易知对固定的t，x，$P(t,x,\Gamma)$是$(E,\mathscr{B})$上的概率测度且$P(0,x,\Gamma)=I_\Gamma(x)$。即条件（a）与（c）成立。下证对固定的$t$，$\Gamma$它关于$x$是$\mathscr{B}$可测函数。为此先考虑$\Gamma=(-\infty,y]$，则

$$P(t,x,\Gamma)=P(x_t-x_0\leqslant y-x)=F_t(y-x),\tag{3}$$

其中$F_t(\cdot)$表示$x_t - x_0$的分布函数。由(3)可见它是x的$\mathscr{B}$可测函数。再利用λ-系方法可知对一般的$\Gamma \in \mathscr{B}$该结论也正确，此即证明了条件（b）成立。最后，验证C-K方程满足。由（2）

$$P(s+t, x, \Gamma) = P((x_{s+t} - x_0 + x) \in \Gamma)$$
$$= P((x_{s+t} - x_t) + (x_t - x_0 + x) \in \Gamma),$$

因X是平稳独立增量过程，$x_{s+t} - x_t$与$x_t - x_0 + x$独立且有$x_{s+t} - x_t$与$x_s - x_0$同分布。因而（3）式右方为

$$\iint\limits_{(y_1 + y_2 \in \Gamma)} P(x_t - x_0 + x \in dy_1) P(x_s - x_0 \in dy_2)$$

$$= \int_E P(t, x, dy_1) \int\limits_{(y_2 \in \Gamma - y_1)} P(x_s - x_0 \in dy_2)$$

$$= \int_E P(t, x, dy_1) P(s, y_1, \Gamma),$$

此即条件（d）成立。因此，由（2）式定义的函数是齐次转移函数。再由（2）易得，对任意x，$x_0' \in E$有

$$P(t, x + x_0', \Gamma + x_0') = P(x_t - x_0 + x + x_0' \in \Gamma + x_0')$$
$$= P(x_t - x_0 + x \in \Gamma)$$
$$= P(t, x, \Gamma).$$

即（1）式满足。

定理 1 设$X = \{x_t\}_{t \geq 0}$是平稳独立增量过程，则事实上它是一个时空齐次的马氏过程，其转移函数由（2）定义。

证明 前面已经说明它是一个马氏过程。为证它的时空齐次性，只需证明它具有由（2）式定义的转移半群。即对任意t，$h \geq 0$，$\Gamma \in \mathscr{B}$，

$$P(x_{t+h} \in \Gamma | x_t) = P(h, x_t, \Gamma) \quad \text{a.e.}, \tag{4}$$

其中$P(h, x, \Gamma)$由（2）给出。

对任意Γ，$A \in \mathscr{B}$有

$$P(x_{t+h} \in \Gamma, x_t \in A) = P(x_t \in A, x_t + x_{t+h} - x_t \in \Gamma)$$

$$=\iint\limits_{\substack{x_1\in A\\ x_1+x_2\in\Gamma}} P(x_t\in dx_1)P(x_{t+h}-x_t\in dx_2)$$

$$=\int_{x_1\in A} P(x_t\in dx_1)\int_{x_2\in\Gamma} P(x_{t+h}-x_t+x_1\in dx_2)$$

$$=\int_{x_1\in A} P(h,\ x_1,\ \Gamma)P(x_t\in dx_1)$$

$$=\int_{(x_t\in A)} P(h,\ x_t,\ \Gamma)P(d\omega).$$

此即证明了（4）式。

下面证明定理1之逆。设 η 是时空齐次马氏过程。$P(t,x,\Gamma)$，$t\geqslant 0$，$x\in E$，$\Gamma\in\mathscr{B}$ 是它的转移函数。

记 $$\pi_s(A)=P(s,\ 0,\ A),\quad s\geqslant 0,\ A\in\mathscr{B},\tag{5}$$

$$\mathscr{N}_s=\sigma\{\eta_t,\ t\leqslant s\},\quad s\geqslant 0,\tag{6}$$

η_t 的分布为 $\mu_t(\cdot)$，

$$\hat{\pi}_s(u)=\int \exp^{iuz}\pi_s(dz),\tag{7}$$

$$\hat{\mu}_t(u)=Ee^{iu\eta_t}=\int \exp^{iuz}\mu_t(dz),\tag{8}$$

其中 $u\in E$，i 是虚数单位。

引理2 对 $u\in E$ 及 $s\geqslant 0$，$t>0$，有

$$E\{\exp^{[iu(\eta_{s+t}-\eta_s)]}|\eta_s\}=\hat{\pi}_t(u)\quad \text{a.e.}.\tag{9}$$

证明 $E\{\exp^{[iu(\eta_{s+t}-\eta_s)]}|\eta_s\}=\exp^{-iu\eta_s}E\{\exp^{iu\eta_{s+t}}|\eta_s\}$.

因此，（9）式等价于

$$E\{\exp^{iu\eta_{s+t}}|\eta_s\}=\exp^{iu\eta_s}\hat{\pi}_t(u)\quad \text{a.e.}.\tag{10}$$

对任一有界 $\mathscr{B}$ 可测函数 f 有

$$E\{\exp^{iu\eta_{s+t}}f(\eta_s)\}$$

$$=\iint \exp^{iux_2}f(x_1)P(\eta_s\in dx_1,\ \eta_{s+t}\in dx_2)$$

$$=\iint \exp^{iux_2}f(x_1)\mu_s(dx_1)P(t,\ x_1,\ dx_2)$$

$$=\iint \exp^{iu(x_2+x_1)} f(x_1)\mu_t(dx_1)\pi_s(dx_2)$$

$$=\int \exp^{iux_2}\pi_s(dx_2)\int \exp^{iux_1} f(x_1)\mu_t(dx_1)$$

$$=\hat{\pi}_s(\mu)E\{\exp^{iu\eta_t} f(\eta_t)\}.$$

特别地，在上式中取 $f=I_\Gamma$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，得到

$$E\{\exp^{iu\eta_{s+t}} I_\Gamma(\eta_t)\}=\hat{\pi}_s(u)E\{\exp^{iu\eta_t} I_\Gamma(\eta_t)\}.$$

此即证明了（10）式。

系 对任意 s，$t\geqslant 0$，及 $u\in E$ 有

$$Ee^{iu(\eta_{s+t}-\eta_t)}=\hat{\pi}_s(u). \tag{11}$$

证明 将（9）式两边取期望即可得。

定理 2 设 $\eta=\{\eta_t\}_{t\geqslant 0}$ 是时空齐次马氏过程，则它是平稳独立增量过程。

证明 对任意 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$，$n\geqslant 1$ 及 $u_k\in E$，$k=0,1,\cdots,n+1$。约定 $\eta_{t_{-1}}=0$。我们有

$$E\left\{\exp\left[i\sum_{k=0}^{n+1}u_k(\eta_{t_k}-\eta_{t_{k-1}})\right]\Big|\mathscr{N}_{t_n}\right\}$$

$$=\exp\left[i\sum_{k=0}^{n}u_k(\eta_{t_k}-\eta_{t_{k-1}})\right]E\{\exp^{iu_{n+1}(\eta_{t_{n+1}}-\eta_{t_n})}|\eta_{t_n}\}, \tag{12}$$

由引理 2，有

$$E\{\exp^{iu_{n+1}(\eta_{t_{n+1}}-\eta_{t_n})}|\eta_{t_n}\}=\hat{\pi}_{t_{n+1}-t_n}(u_{n+1})\quad \text{a.e.},$$

（12）式两边取期望得

$$E\exp\left[i\sum_{k=0}^{n+1}u_k(\eta_{t_k}-\eta_{t_{k-1}})\right]$$

$$=E\exp\left[i\sum_{k=0}^{n}u_k(\eta_{t_k}-\eta_{t_{k-1}})\right]\cdot\hat{\pi}_{t_{n+1}-t_n}(u_{n+1}). \tag{13}$$

利用归纳法可得上式右方为

$$\hat{\mu}_{t_0}(u_0)\prod_{k=1}^{n+1}\hat{\pi}_{t_k-t_{k-1}}(u_k). \tag{14}$$

(11) 和 (12) 式表明 η_{t_0}, $\eta_{t_1}-\eta_{t_0}$, …, $\eta_{t_{n+1}}-\eta_{t_n}$ 是相互独立的。

再由 (11) 可见，对任意 s、$t\geqslant 0$ $\eta_{s+t}-\eta_s$与$\eta_t-\eta_0$同分布。故命题证毕。

系 时空齐次马氏过程是Feller过程。

证明 即要证其转移函数是Feller 的。设 f 是任一有界连续函数，由时空齐次性有

$$T_tf(x)=\int f(y)P(t,\ x,\ dy)$$
$$=\int f(x+y)\pi_t(dy).$$

利用控制收敛定理及 f 的连续性易得$T_tf(x)$ 是 x 的有界连续函数。

在§4.2中我们给出了Wiener过程和Poisson过程的定义，易见这两类过程均是平稳独立增量过程。在§4.3中还定义了Wiener转移函数和 Poisson转移函数并指出初始为 0 的 Poisson 过程和初始为零的Wiener过程分别是具有Poisson转移函数和Wiener转移函数的齐次马氏过程。本节定理1进一步指出无论初始状态如何，这两类过程均是时空齐次的马氏过程。此外，**对称稳定过程** (Symmetric Stable Processes) 也是一类重要的平稳独立增量过程。所谓对称稳定过程是指其增量$x_{t+s}-x_s$的特征函数为

$$f_\alpha(t)=e^{-|t|^\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 2.$$

事实上，当$\alpha=2$时，它是Wiener过程（关于$e^{-|t|^\alpha}$是概率分布函数的特征函数的证明可参看[8]定理6.5.4）。

由于本章是研究平稳独立增量过程，因而若不特别声明，以后就简称平稳独立增量过程为独立增量过程。

习　题

1. 以m表示Lebesque测度，对任意$A\in\mathscr{B}$和$t\geqslant 0$，记$mP_t(A)=\int m(dx)P(t,x,A)$。求证对时空齐次马氏过程有

$$mP_t=m,\quad t\geqslant 0.$$

此即表示m是半群$\{P_t\}$的一个σ有穷不变测度。设$\{P_t\}$是Wiener转移半群，求证它的任何一个σ-有穷不变测度μ均具有$\mu=cm$的形式，其中c是一个正常数。

2. 设X是时空齐次马氏过程且是标准的，则对任一$x\in E$，关于P_x它是平稳独立增量过程。

3. 设X是独立增量过程，T是$\{\mathscr{N}_t\}$停时($\mathscr{N}_t=\sigma\{x_s,\ s\leqslant t\}$)且$P(T<\infty)=1$。求证过程$y_t=x_{T+t}-x_T$与$\sigma$代数$\mathscr{N}_T$独立($X$轨道是右连续的)。

§6.2　独立增量过程的性质

本节假设过程X作为齐次马氏过程是标准的，且对每一个$x\in E$，关于P_x它是右随机连续的。在这些条件下，着重研究它的轨道性质。

定理1　设独立增量过程X对每一个$x\in E$，关于P_x是右随机连续的，则对任一有界连续函数f及$x\in E$，有

$$\lim_{t\to 0^+}T_tf(x)=T_0f(x)=f(x).\tag{1}$$

证明　由§1.2习题13知，因$f(x)$是连续函数，故对任意$x\in E$，关于P_x，$f(x_t)$也是右随机连续的。又设f的一个界是M。因此，对任给$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}|T_tf(x)-T_0f(x)|&=|E_xf(x_t)-E_xf(x)|\leqslant E_x|f(x_t)-f(x)|I_{(|f(x_t)-f(x)|\geqslant\varepsilon)}+E_x|f(x_t)-f(x)|I_{(|f(x_t)-f(x)|<\varepsilon)}\\&\leqslant 2MP_x(|f(x_t)-f(x)|\geqslant\varepsilon)+\varepsilon P_x(|f(x_t)-f(x)|<\varepsilon),\end{aligned}$$

上式两边令 $t\to0^+$ 得

$$\overline{\lim_{t\to0^+}}|T_tf(x_t)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{t\to0^+}T_tf(x)=f(x)$。

系 $T_tf(x)$ 关于 t 是右连续函数。

证明 对任意 $x\in E$ 及 $t\geqslant0$，由（1）和控制收敛定理有

$$T_tf(x)=T_t(\lim_{s\to0^+}T_sf(x))=\lim_{s\to0^+}T_{t+s}f(x). \qquad (2)$$

上式表明 $T_tf(x)$ 关于 t 右连续。

引理1 对任意有界 $\mathscr{B}$ 可测函数 $f(x)$，$T_tf(x)$ 关于 (t,x) 是 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{B}$ 可测函数。

证明 先考虑 f 是有界连续函数情形。

由（2）式及前节定理2之系知，$T_tf(x)$ 关于 t 右连续，关于 x 连续。令

$$g_n(s,x)=I_{(s=0)}f(x)+\sum_{k=0}^{\infty}T_{\frac{k}{2^n}}f(x)I_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(s). \qquad (3)$$

易见（3）式右方和式中每一项都是 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{B}$ 可测的，因而 $g_n\in\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{B}$ 且关于 (s,x) 在逐点收敛意义下，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(s,x)=T_sf(x)$，故 $T_sf(x)$ 也具有相同的可测性。

当 f 是有界 $\mathscr{B}$ 可测函数时，由上述结论及附篇（一）定理5推知，$T_tf(x)$ 仍是 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{B}$ 可测的，故引理1得证。

系 转移函数 $P(t,x,\Gamma)$ 关于 (t,x) 是 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}\times\mathscr{B}$ 可测的。

证明 在引理1中取 $f(x)=I_\Gamma(x)$ 即得上述结论。

若 f 是有界或非负 $\mathscr{B}$ 可测函数，由引理1，对每一个 $\alpha>0$ 可定义一个新的函数，

$$U^{\alpha}f(x)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}T_tf(x)dt. \qquad (4)$$

定理 2　设 $f(x)$ 是非负有界 $\mathscr{B}$ 可测函数，则在定理 1 的条件下，对 $\alpha>0$ 及 $x\in E$，$\{e^{-\alpha t}U^{\alpha}f(x_t),\ \mathscr{N}_t,\ P_x\}$ 是上鞅，其中 $\mathscr{N}_t=\sigma\{x_s,\ s\leqslant t\}$。

证明

$$e^{-\alpha t}T_t(U^{\alpha}f(x))=e^{-\alpha t}\int_0^{\infty}e^{-\alpha s}T_{s+t}f(x)ds$$

$$=\int_t^{\infty}e^{-\alpha s}T_sf(x)ds\leqslant\int_0^{\infty}e^{-\alpha s}T_sf(x)ds=U^{\alpha}f(x). \qquad (5)$$

上式表明

$$e^{-\alpha t}T_t(U^{\alpha}f(x_s))\leqslant U^{\alpha}f(x_s). \qquad (6)$$

另一方面

$$e^{-\alpha t}T_t(U^{\alpha}f(x_s))=e^{-\alpha t}E_{x_s}(U^{\alpha}f(x_t))$$
$$=e^{-\alpha t}E_x\{U^{\alpha}f(x_{s+t})|\mathscr{N}_s\}\quad \text{a.e.}. \qquad (7)$$

综合（6）与（7）得

$$E_x\{e^{-\alpha(s+t)}U^{\alpha}f(x_{s+t})|\mathscr{N}_s\}\leqslant e^{-\alpha s}U^{\alpha}f(x_s)\quad \text{a.e.}.$$

命题证毕。

引理 2　若 $f(x)$ 是有界连续函数，则对任一 $\alpha>0$，在定理 1 的条件下有

（i）$U^{\alpha}f(x)$ 是 x 的有界连续函数；

（ii）$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha U^{\alpha}f(x)=f(x)$。

证明　因

$$U^{\alpha}f(x)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}T_tf(x)dt,$$

由前节定理 2 之系知 $T_tf(x)$ 是 x 的连续函数，因而由控制收敛定理可得 $U^{\alpha}f(x)$ 是连续函数。

下证（ii）成立。

$$|\alpha U^{\alpha}f(x)-f(x)|=\left|\int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha t}(T_tf(x)-f(x))dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} e^{-u} |T_{u/\alpha} f(x) - f(x)| du$$

由（1）及控制收敛定理得

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha U^{\alpha} f(x) = f(x),$$

命题得证。

设O是E中任一有界开集，$\overline{O}$表示O的闭包集，$d(x, \overline{O})$表示点x与集$\overline{O}$的距离。

令

$$\phi(x) = 1 - \frac{d(x, \overline{O})}{1 + d(x, \overline{O})} = \frac{1}{1 + d(x, \overline{O})}. \quad (8)$$

显然，ϕ是E上的有界连续函数. 以∞表示无穷远点，则有$\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = 0$。补定义$\phi(\infty) = 0$，则

$$0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1 \quad (9)$$

当且仅当　　$x = \infty$时

$$\phi(x) = 0, \quad (10)$$

当且仅当　　$x \in \overline{O}$时

$$\phi(x) = 1. \quad (11)$$

由前节定理2之系知$T_t\phi(x)$是E上的有界连续函数。

$$T_t\phi(x) = \int \phi(y) P(t, x, dy)$$

$$= \int \phi(x + y) \pi_t(dy),$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{x \to \infty} \int \phi(x + y) \pi_t(dy) = 0. \quad (12)$$

又

$$U^{\alpha}\phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} T_t \phi(x) dt,$$

再由控制收敛定理及（12）得

$$\lim_{x \to \infty} U^{\alpha} \phi(x) = 0, \quad (13)$$

从而可补定义 $U^{\alpha}\phi(\infty)=0$， (14)

由（8），（9）和（10）知 $\phi(x)>0$，$x\in E$。从而

$$T_t\phi(x)>0,\quad t\geqslant 0,\quad x\in E,$$

因此，当且仅当 $x=\infty$ 时，

$$U^{\alpha}\phi(x)=0,\quad \alpha>0. \tag{15}$$

定义 1 称定义在 $\bar{E}=E\cup\{\infty\}$ 上的函数族是区分 $\bar{E}$ 中的点的、若对 $\bar{E}$ 中任意两个不同的点 x 和 y，存在该族中的函数 f，使

$$f(x)\neq f(y).$$

以 $\boldsymbol{N}$ 表示全体自然数，$\boldsymbol{H}=\{O_n,\ n\in\boldsymbol{N}\}$ 是以有理数为端点的开区间的全体。它是一个可数集。

对每一个 $x\in E$，令

$$\phi_n(x)=1-\frac{d(x,\ \bar{O}_n)}{1+d(x,\ \bar{O}_n)}=\frac{1}{1+d(x,\ \bar{O}_n)}, \tag{16}$$

补定义

$$\phi_n(\infty)=\lim_{x\to\infty}\phi_n(x)=0.$$

置

$$\boldsymbol{D}=\{U^{\alpha}\phi_n,\ \alpha\in\boldsymbol{N},\ n\in\boldsymbol{N}\}, \tag{17}$$

故 $\boldsymbol{D}$ 是定义在 $\bar{E}$ 上的有界连续函数构成的可数集。

引理 3 由（17）定义的函数集 $\boldsymbol{D}$ 是区分 $\bar{E}$ 中点的。

证明 先考虑任意 x，$y\in E$，$x\neq y$ 的情形，存在 $O_n\in\boldsymbol{H}$、使得 $x\in\bar{O}_n$ 但 $y\notin\bar{O}_n$。由（9），（10）和（11）知 $\phi_n(x)=1>\phi_n(y)>0$。由引理 2，对充分大的 $\alpha\in\boldsymbol{N}$

$$|\alpha U^{\alpha}\phi_n(x)-\phi_n(x)|<\frac{1}{2}(1-\phi_n(y)),$$

$$|\alpha U^{\alpha}\phi_n(y)-\phi_n(y)|<\frac{1}{2}(1-\phi_n(y)),$$

因而

$$\alpha U^{\alpha}\phi_n(x)\neq\alpha U^{\alpha}\phi_n(y),$$

从而

$$U^{\alpha}\phi_n(x)\neq U^{\alpha}\phi_n(y).$$

另一方面，若$x\in E$，$y=\infty$．对每一个$\alpha\in\boldsymbol{N}$，$n\in\boldsymbol{N}$，由（15）知，$U^{\alpha}\phi_n(y)=0$，$U^{\alpha}\phi_n(x)>0$ 故 $U^{\alpha}\phi_n(x)\neq U^{\alpha}\phi_n(y)$。

综上，得证$\boldsymbol{D}$是区分$\bar{E}$中点的。

下面将证明一个分析引理．用goh表示g与h的复合函数$g(h)$，$goh|S$表示它在集合S上的限制。

引理 4 设h是定义在E上的函数．S是E的一个稠子集，$\boldsymbol{D}$是由（17）定义的函数集合．若对每一个$g\in\boldsymbol{D}$，

$$goh|S\text{具有右极限和左极限}, \tag{18}$$

那么，$h|S$具有右和左极限（其值可以是∞）。

证明 不失一般性，假设对某个t，$h|S$不存在右极限．那么，存在$t_n\in S$，$t_n'\in S$且$t_n\downarrow t$，$t_n'\downarrow t$使得

$$h(t_n)\dashrightarrow x\neq y\leftarrow\!\!-\!-\!-h(t_n'),$$

其中x，$y\in\bar{E}$．由引理3，存在$g\in\boldsymbol{D}$使$g(x)\neq g(y)$，

$$goh(t_n)\longrightarrow g(x)\neq g(y)\longleftarrow(goh)(t_n'),$$

这与（18）矛盾，从而命题得证（$\lim\limits_{n\to\infty}h(t_n)=\infty$，意味着$\lim\limits_{n\to\infty}|h(t_n)|=\infty$）。

定理 3 设X是独立增量过程．对任意$x\in E$关于P_x右随机连续，又S是$[0,\infty)$中一可数稠集．那么

$P_x\{x(\cdot,\omega)|S$在$[0,\infty)$中具有右极限和左极限$\}=1$

（对端点0自然只考虑右极限．此外，这些极限可以是∞）。

证明 设$\boldsymbol{D}$是由（17）定义的函数集．对$g\in\boldsymbol{D}$存在k，$l\in\boldsymbol{N}$，使

$$g=U^{k}\phi_l,$$

其中ϕ_l是由（16）定义的有界连续函数．由定理2

$$\{e^{-kt}U^{k}\phi_l(x_t),\ \mathscr{N}_t,\ P_x\} \tag{19}$$

是上鞅．因此，由第五章§5.4，存在Ω_g，$P_x(\Omega_g)=1$若$\omega\in\Omega_g$，那么这个样本函数

$$t\longrightarrow e^{-\alpha t}g(x_t) \tag{20}$$

限制于S中具有右极限和左极限．显然当因子$e^{-\alpha t}$去掉后，结论仍成立，令$\Omega_*=\bigcap\limits_{g\in D}\Omega_g$，那么$P_x(\Omega_*)=1$，对$\omega\in\Omega_*$，前面的结论对每一个$g\in D$成立．由引理3和4推得$x_t(\omega)$限制于$S$上具有命题所需性质。

定义

$$\tilde{x}_t^*(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{v\in s\\ v\downarrow t}} x_v(\omega), & \omega\in\Omega_*,\\ 0, & \omega\notin\Omega_*;\end{cases} \tag{21}$$

$$\hat{x}_t^*(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{v\in s\\ v\uparrow t}} x_v(\omega), & \omega\in\Omega_*,\\ 0, & \omega\notin\Omega_*.\end{cases} \tag{22}$$

沿用§5.4定理2证明中的有关的分析方法可以得到，$\tilde{x}_t^*(\cdot)$和$\hat{x}_t^*(\cdot)$分别是右连续具有左极限和左连续具有右极限的。

注　1°　称x_t在t_0处的右极限是∞，这意味着
$\lim\limits_{t\downarrow t_0}|x_t|=\infty$。

2°　$\tilde{x}_t^*(\hat{x}_t^*)$的右（左）连续左（右）极限的情形包括取$\infty$值的情况。

3°　设X的初始分布是μ，由于定理2对P_μ也成立即$\{x_t,\mathscr{F}_t,P_\mu\}$是上鞅。因而易见定理3的结论对$P_\mu$也成立。从而可以仿照（21）和（22）定义$\{\tilde{x}_t^*\}$和$\{\hat{x}_t^*\}$前者的轨道是右连续且存在左极限的。后者的轨道是左连续且存在右极限的。

定理4　设X满足定理3的条件，那么对每一个$x\in E$关于P_x，$\{\tilde{x}_t^*\}$是$\{x_t\}$的一个修正。

证明　由右随机连续性，对每一个固定的t，存在$v_n\in S$（可数稠集），$v_n\downarrow t$且

$$P_x\{\lim_n x_{\nu_n} = x_t\} = 1 . \tag{23}$$

（23）式成立是因为依概率收敛可以得到沿某一个子列的几乎处处收敛。但由定理 3，（23）式中的极限应几乎处处等于$\tilde{x}_t^*$，因此

$$P_x(\tilde{x}_t^* = x_t) = 1 .$$

系 1 若X关于每一个P_x是随机连续的，则$\tilde{x}_t^*$也是它的一个修正。

系 2 若X的初始分布是μ，则关于P_μ，$\{\tilde{x}_t^*\}$是X的一个修正（$\tilde{x}_t^*$由（21）式定义，那里的集合Ω^*满足$P_\mu(\Omega^*)=1$）。

证明 因对每一个$x\in E$，关于P_x，过程X右随机连续，从而推出关于P_μ也是。因而定理 2，3 和 4 的结论关于P_μ也成立，故该命题结论正确。

前面的讨论得到$P_x(\tilde{x}_t^* = x_t) = 1$，因而

$$P_x(\tilde{x}_t^* \in E) = 1, \tag{24}$$

但是否有

$$P_x(\tilde{x}_t^* \in E, \ 对一切 \ t \geqslant 0) = 1 \tag{25}$$

呢？这自然是一个值得关心的问题。因为如果（25）成立，则存在修正$\{\tilde{x}_t^*\}$它的一切轨道右连续且取值于E中，又因其转移函数是Feller 的，这就导出了$\{\tilde{x}_t^*\}$是一个强马氏过程。

为回答该问题，需要下面这个引理。

引理 4 设$\{y_t, \mathscr{F}_t, P\}$是一个非负上鞅，其轨道右连续。令

$$T_1(\omega) = \begin{cases} \inf(t \geqslant 0, \ y_t(\omega) = 0), \\ \infty, \qquad\qquad 如上集空, \end{cases}$$

$$T_2(\omega) = \begin{cases} \inf(t \geqslant 0, y_{t-}(\omega) = 0), \\ \infty, \qquad\qquad 如上集空, \end{cases}$$

$$T = T_1 \cap T_2,$$

则对几乎一切ω，在集合$\{T(\omega)<\infty\}$上，对一切$t\geqslant 0$，$y(T$

$+t$, $\omega)=0$ 即

$$P(y(T+t)=0, \text{对一切 } t\geq 0\,|\,T<\infty)=1.$$

该引理的证明需要较多的知识，故不详述，有兴趣的读者可参阅〔2〕，§1.5定理4。

以下的讨论均对固定 x 的，因而简记 $\{x_t^x\}$ 为 $\{x_t\}$，P_x 为 P。

定理 5　设 $\{x_t\}$ 是由（21）式所定义，令

$$\rho(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\geq 0,\ x_t(\omega)=\infty \text{或} x_{t-}(\omega)=\infty\}, \\ \infty, \qquad\qquad \text{如上集空，}\end{cases} \tag{26}$$

则对几乎一切的 ω，$\rho(\omega)=\infty$。

证明　分两段。

（i）对几乎一切 ω，在集合 $(\rho(\omega)<\infty)$ 上，$x(\rho+t)=\infty$，对一切 $t\geq 0$ 成立（ρ 的可测性留做习题）。

取 $\phi(x)$ 是（8）中定义的有界连续函数。令

$$Z_t=e^{-t}U^1\phi(x_t). \tag{27}$$

因为 $U^1\phi(x)$ 在 $\bar{E}$ 上连续，又 $\{x_t\}$ 右连续且具有左极限（可以取 ∞ 为值）的。因而 Z_t 也是右连续且具有左极限的。此外，由(15)知，当仅当 $x=\infty$ 时 $U^1\phi(x)=0$。因此，

$$\rho(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\geq 0,\ Z_t(\omega)=0 \text{或} Z_{t-}(\omega)=0\}, \\ \infty, \qquad\qquad \text{如上集空。}\end{cases} \tag{28}$$

由定理2知，$\{Z_t, \mathscr{N}_t\}$ 是非负上鞅，利用引理4得到（i）中的结论。

其次，证明

（ii）对几乎一切 ω，$\rho(\omega)=\infty$。

对每一个 $t\geq 0$，由转移函数的性质（参看§4.3定义2）得

$$P(x_t\in E)=1. \tag{29}$$

由（i）的结论知，对几乎一切 ω，在集合 $(\rho(\omega)<t)$ 上有 $x_t(\omega)=\infty$。让 $t\geq 0$ 且 $t\in Q$（有理数集），

$$P(\rho < t) \leqslant P(x_t = \infty) = 0,$$

$$P(\rho < \infty) \leqslant \sum_{\substack{t \geqslant 0 \\ t \in Q}} P(\rho < t) = 0. \qquad (30)$$

故（ii）的结论成立。综上命题证毕。

由定理 5 立即推出（25）式成立。

§6.3 Poisson 过程

在第四章§4.2中已经指出，参数为$\lambda(>0)$的 Poisson 过程其增量$x_t - x_s$具有参数为$\lambda(t-s)$的Poisson分布。即

$$P(x_t - x_s = k) = \frac{\lambda^k |t-s|^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\} \qquad (1)$$

由于$x_t - x_s$的分布只依赖于$t-s$，故它是平稳独立增量过程。若X作为齐次马氏过程是标准的，则对每一个非负整数i，关于P_i它仍是一个具有参数λ的Poisson过程，由以下 I 的推导可见，关于P_i它是随机连续的，因而前节的各结论对它都成立，后面的讨论，关于P_i自然也对。

本节我们将进一步研究其样本函数的一些性质。并总假设它是可分的，R为可分集。

I 对任意实数δ，使$t \geqslant 0$，$t+\delta \geqslant 0$，有

$$P(x_{t+\delta} \neq x_t) = 1 - P(x_{t+\delta} = x_t) = 1 - e^{-\lambda|\delta|} \leqslant \lambda|\delta|,$$

故此过程是随机连续的（关于P）且满足§1.3（14）。因此，如假设此过程是可分的，则它是完全可分的，并且样本函数以概率1在任意$[0, n]$区间中，从而在$[0, \infty)$中是阶梯函数。

II 对任意$0 \leqslant s < t$，由（1）得

$$P(x_t \geqslant x_s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x_t - x_s = k) = 1,$$

故

$$P(x_t \geqslant x_s,\ 对R中一切s,\ t,\ t > s) = 1.$$

换言之，样本函数在R上以概率1是不减的，由可分性知，它以概率1在$[0, \infty)$上不减。

Ⅲ 几乎一切样本函数是不连续的，因此，几乎一切样本函数有断点，如上所述，后者是跳跃点（参看§1.3中的定义）。实际上

$$P(x_t(\omega)\text{在}[0, a]\text{中连续})=P(x_a(\omega)=x_0(\omega))$$
$$=e^{-\lambda a}\longrightarrow 0\ (a\longrightarrow\infty).$$

如令$A_\infty=(x_t(\omega)$ 在$[0, \infty)$ 连续），$A_a=(x_t(\omega)$ 在$[0, a]$ 连续），则因$A_b\subset A_a(a\leqslant b)$，故

$$P(A_\infty)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)=\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda n}=0.$$

Ⅳ 几乎一切样本函数，在每一跳跃点的跃度（即左右极限的差的绝对值）为1。实际上，如在$[0, a]$中，有一跃度大于1，则必

$$\max_{0<j<n}\left[x\left(\frac{j+1}{n}a\right)-x\left(\frac{j-1}{n}a\right)\right]>1\quad(n\geqslant 1).$$

但此事件的概率不超过

$$\sum_{j=1}^{n-1} P\left\{x\left(\frac{j+1}{n}a\right)-x\left(\frac{j-1}{n}a\right)>1\right\}$$
$$=(n-1)\left(1-e^{-2\lambda a/n}-e^{-2\lambda a/n}\cdot\frac{2\lambda a}{n}\right)\longrightarrow 0(n\longrightarrow\infty).$$

故在$[0, a]$中存在跃度大于1的概率为0。然后利用上段中同样方法即得所欲证。

Ⅴ 在任一固定点$t_0\geqslant 0$上，几乎一切样本函数都是连续的。实际上，如$t_0>0$，

$$P\{x(t_0+\varepsilon, \omega)-x(t_0-\varepsilon, \omega)>0\}=1-e^{-2\lambda\varepsilon}\longrightarrow 0$$
$$(\varepsilon\longrightarrow 0),$$
$$P\{x(\varepsilon, \omega)-x(0, \omega)>0\}=1-e^{-\lambda\varepsilon}\longrightarrow 0$$
$$(\varepsilon\longrightarrow 0).$$

然后利用Ⅲ中同样方法。

注意性质Ⅲ，Ⅴ不是矛盾的，第Ⅲ表示，存在ω集A，$P(A)=1$，对任意的$\omega\in A$，样本函数$x_t(=x_t(\omega))$不是t的连续函数。而第Ⅴ表示，对任意固定的t_0，存在ω集B_{t_0}，$P(B_{t_0})=1$，$\omega\in B_{t_0}$时，样本函数$x_t(=x_t(\omega))$在固定点t_0是连续的。换言之，虽然几乎一切样本函数都不是连续的，然而它的断点都是"流动的"。这引导出下列一般的概念：

设$\{x_t\}$是任意的随机过程，$t_0\geqslant 0$。如果存在序列$s_n\longrightarrow t_0$，使

$$P(\lim_{n\to\infty} x_{s_n}(\omega)=x_{t_0}(\omega))<1,$$

就称t_0为过程的**固定断点**，不是固定断点的断点称为**流动断点**。

第Ⅲ、第Ⅴ可改述为：对可分Poisson过程，以概率1存在流动断点，但任何$t_0(\geqslant 0)$都不是固定断点。

既然几乎一切样本函数都是阶梯函数，它们的跳跃点可按大小排列成

$$\tau_1(\omega)<\tau_2(\omega)<\cdots.$$

在任意有穷区间中，只可能有有穷多个τ_i的概率为1。每一$\tau_i(\omega)$以概率1有定义。由阶梯函数的定义，$x(\tau_i)$等于$x(\tau_i+0)$或$x(\tau_i-0)$。由于τ_i不是固定断点，对任一非负常数t_0，$P(\tau_i=t_0)=0$，故不影响过程的有穷维分布，可设$x(\tau_i,\omega)=x(\tau_i+0,\omega)$。经过这样修改后，此可分Poisson过程的几乎一切样本函数都是右连续的阶梯函数，取非负整数值，而且$x(\tau_i)-x(\tau_i-0)=1$。图15绘出了一个典型的样本函数的图形（其中设$x_0=0$）。

Ⅵ 现在考虑随机变量列$\{S_n(\omega)\}$，这里

$$S_n(\omega)=\tau_n(\omega)-\tau_{n-1}(\omega)\quad(\tau_0(\omega)=0).$$

试证$\{S_n(\omega)\}$为独立同分布的，共同的分布函数为

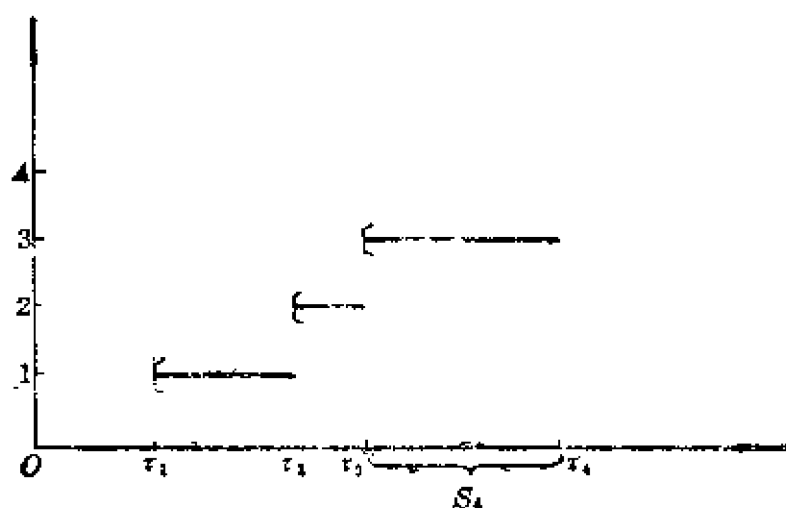


图 15

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & \text{如 } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{如 } y<0.\end{cases}$$

实际上，如$y_1\geqslant 0$

$$P(S_1(\omega)\leqslant y_1)=P\{x(y_1,\ \omega)-x(0,\ \omega)\geqslant 1\}$$
$$=1-e^{-\lambda y_1};$$

如$y_1<0$，则因$S_1(\omega)$非负，故$P(S_1(\omega)\leqslant y_1)=0$。

以下证独立同分布。为了使记号简单起见，只证明$S_1(\omega)$与$S_2(\omega)$独立，有相同分布函数为$F(y)$。对有穷多个$S_1(\omega)$、…，$S_n(\omega)$的证明类似。对任意$n>1$，如$y_1>0$，$y_2>0$，有

$$P(S_1(\omega)\leqslant y_1,\ S_2(\omega)\leqslant y_2)$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}P\left\{x\left(\frac{jy_1}{n},\ \omega\right)-x(0,\ \omega)=0,\right.$$

$$x\left(\frac{j+1}{n}y_1,\ \omega\right)-x\left(\frac{j}{n}y_1,\ \omega\right)=1,$$

$$\left.x\left(\frac{j+1}{n}y_1+y_2,\ \omega\right)-x\left(\frac{j+1}{n}y_1,\ \omega\right)\geqslant 1\right\}$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}P\left\{x\left(\frac{jy_1}{n},\ \omega\right)-x(0,\ \omega)=0,\right.$$

$$x\left(\frac{j+1}{n}y_1,\ \omega\right)-x\left(\frac{jy_1}{n},\ \omega\right)\geqslant 2\right\}.$$

根据增量独立的假定及（1），右方第二项为

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda jy_1/n}\left(1-e^{-\lambda y_1/n}-e^{-\lambda y_1/n}\cdot\frac{\lambda y_1}{n}\right)$$

$$=\frac{1-e^{-\lambda y_1}}{1-e^{-\lambda y_1/n}}O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty),$$

而第一项为

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda jy_1/n-(\lambda y_1/n)}\left(\frac{\lambda}{n}y_1\right)(1-e^{-\lambda y_2})$$

$$\longrightarrow(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2})\quad(n\to\infty).$$

故得

$$P(S_1(\omega)\leqslant y_1,\ S_2(\omega)\leqslant y_2)\leqslant(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2}).\tag{2'}$$

另一方面，（2）中左方值不小于

$$\sum_{j=0}^{n-1} P\left\{x\left(\frac{jy_1}{n},\omega\right)-x(0,\ \omega)=0,\right.$$

$$x\left(\frac{j+1}{n}y_1,\ \omega\right)-x\left(\frac{jy_1}{n},\ \omega\right)=1,$$

$$\left.x\left(\frac{jy_1}{n}+y_2,\ \omega\right)-x\left(\frac{j+1}{n}y_1,\ \omega\right)\geqslant 1\right\}$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1} e^{-\lambda jy_1/n}\frac{\lambda y_1}{n}e^{-\lambda y_1/n}(1-e^{-\lambda(y_2-(y_1/n))})$$

$$\longrightarrow(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2})\quad(n\to\infty).$$

故论断得以证明。

既然$P(S_i(\omega)<\infty)=1$，故

$$P(\tau_n(\omega)<\infty)=P\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i(\omega)<\infty\right\}=1,$$

可见每个$\tau_n(\omega)$以概率1有穷。根据阶梯函数的定义得

$$P(\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega)=\infty)=1.$$

Ⅶ 由上已知，Poisson过程的一个修正是$\{x_t\}$，它的样本函数以概率1右连续。换句话说，存在A，$P(A)=1$，对任意固定的ω，$x_t(\omega)$，$t\geqslant 0$，是t的右连续函数。若令

$$\tilde{x}_t(\omega)=\begin{cases} x_t(\omega), & 如\omega\in A, \\ 0, & 如\omega\notin A. \end{cases}$$

则$\{\tilde{x}_t\}$是其另一个修正，它的一切轨道右连续。

以下，将究研Poisson过程产生的实际背景。

Poisson过程是描述具有下列性质（1°）—（4°）的随机事件流（简称Poisson流）的数学模型。

1° 无后效性。在互不相交的时间区间内，事件发生的次数是相互独立的，亦即严格地说，$\{x_t\}$具有独立增量。

2° 平稳性。在$(a, a+t]$时间区间内，发生k次事件的概率$v_k(t)$只与t有关而不依赖于a且$v_0(t)$不恒等于1。

3° 有限非平凡性。在有穷区间$(a, a+t]$中，只出现有穷多个事件，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)=1.$$

4° 普通性。在$(a, a+t]$中出现两个或更多事件的概率$\psi(t)(=1-v_0(t)-v_1(t))$关于$t$是高级无穷小，即

$$\lim_{t\to 0} \psi(t)/t=0.$$

如以$\{x_t\}$表示Poisson流在$[0, t]$时间内发生的事件次数，则它是Poisson过程。

由1°知$\{x_t\}$是独立增量，为证它是Poisson过程，只需证明条件（1）成立。

令

$v_i(t-s)=P\{(x_t-x_s)=i\}$，由 1°和 2°，

$$v_0(1)=\left[v_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

设$v_0(1)=\theta$，则 $v_0\left(\frac{1}{n}\right)=\theta^{1/n}$。对任意给定的 t，决定 k，使 $\frac{k-1}{n}<t\leqslant\frac{k}{n}$。由于 $v_0(t)$ 是 t 的不增函数，有

$$\theta^{\frac{k-1}{n}}=v_0\left(\frac{k-1}{n}\right)\geqslant v_0(t)\geqslant v_0\left(\frac{k}{n}\right)=\theta^{\frac{k}{n}}.$$

令 $n\longrightarrow\infty$，由 k 的定义(k 是 n 的函数)，得 $\frac{k}{n}\longrightarrow t$，$\frac{k-1}{n}\longrightarrow t$，从而由上式得

$$v_0(t)=\theta^t\qquad(t>0),\tag{3}$$

其中 $0\leqslant\theta=v_0(1)\leqslant1$。如 $\theta=0$，则$v_0(t)=0$ 对任意 $t>0$ 成立，由 1°可推知以概率 1 在任意有穷区间内会出现无穷多个事件，此与假设 3°矛盾；如 $\theta=1$，则在任意区间内不出现事件的概率为 1，此与 2°矛盾。故不需要考虑 $\theta=0$ 或 1 的清况。于是可设 $\theta=e^{-\lambda}$，这里 λ 是某正常数。由（3）得

$$v_0(t)=e^{-\lambda t}.\tag{4}$$

下面计算$v_k(t)$，它是在$(a,\ a+t]$中出现 k 个事件的概率。由 2°，不妨取 $a=0$．将（0，t]分成 n 个等长的子区间，$n>k$。令A_1表事件："在某 k 个子区间内，各恰好出现一个事件，而在其它 $n-k$ 个子区间内不出现事件"；A_2表事件："至少有一个子区间内出现两个或两个以上事件"，于是

$v_k(t)=P(A_1)+P(A_2$：在$(0,t]$中出现 k 个事件)。(5)

既然

$$P(A_1)=\binom{n}{k}[v_1(\delta)]^k[v_0(\delta)]^{n-k},$$

其中 $\delta=\frac{t}{n}$，而且由(4)，4°，当 $n\longrightarrow\infty$ 因而 $\delta\longrightarrow0$ 时

$$[v_0(\delta)]^{n-k}=e^{-\lambda\delta(n-k)}=e^{-\lambda t}e^{k\lambda\delta}=e^{-\lambda t}[1+o(1)],$$

$$[v_1(\delta)]^k=[1-e^{-\lambda\delta}-\psi(\delta)]^k=[1-e^{-\lambda\delta}+o(\delta)]^k$$

$$=(\lambda\delta)^k[1+o(1)]=\frac{(\lambda t)^k}{n^k}[1+o(1)],$$

故

$$P(A_1)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot$$

$$[1+o(1)]\longrightarrow e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad(n\longrightarrow\infty). \quad (6)$$

其次，（5）中右方第二个概率显然不大于$P(A_2)$，既然在任一固定的子区间出现两个或两个以上事件的概率为$\psi(\delta)$，由4°

$$P(A_2)\leqslant n\psi(\delta)=t\frac{\psi(\delta)}{\delta}\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty).$$

由此及（5），（6）得证（1）式，即

$$v_k(t)=P(x_{a+t}-x_a=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

显然任一Poisson过程具有性质（1°）—（4°）。可见这四条性质是Poisson过程的特性。

以上内容主要取材于[1]。

最后，将以实际例子来描述Poisson过程的结构。

例1 观察来到某“服务站”的“顾客流”。设T_1，T_2，…为顾客相继到达服务站的间隔时间。假定T_n，$n=1$，2，…相互独立且具有相同的负指数分布$F(t)$，

$$F(t)=P(T_n\leqslant t)=1-e^{-\lambda t},\quad \lambda>0,\quad t\geqslant 0. \qquad (7)$$

令

$$S_0=0,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

S_n表示第n个顾客到达服务站的时间。以x_t表示[0，t]时间内来到服务站的顾客人数，即

$$x_t=k,\ \text{如}S_k\leqslant t<S_{k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

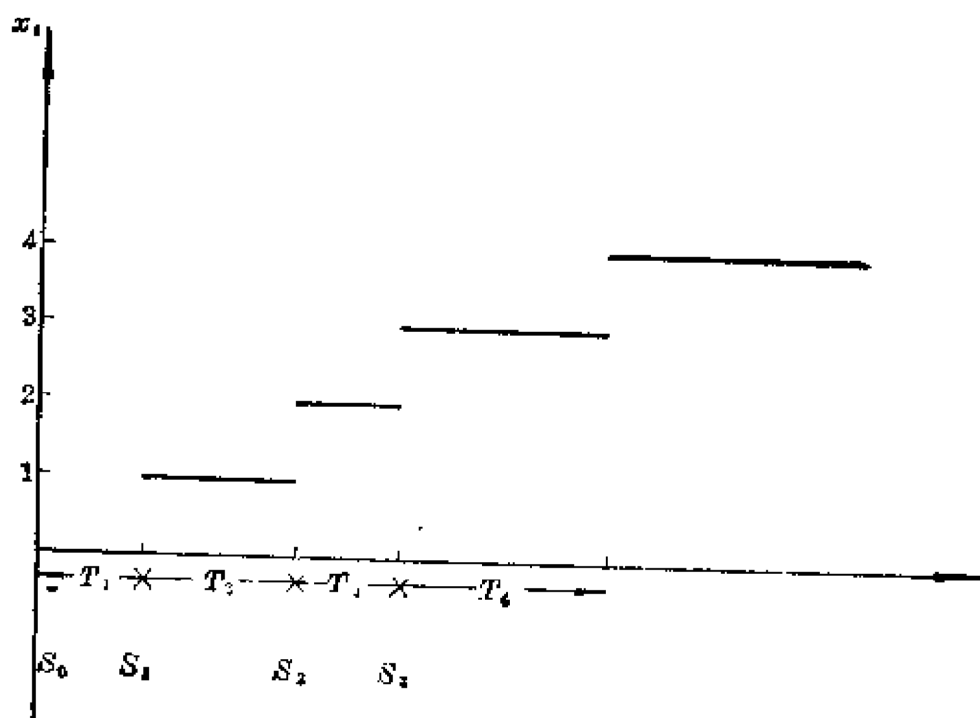


图 16

则可证$\{x_t\}$是具有参数λ的Poisson过程。为此先证几个预备性引理。

引理 1 x_t是具有参数为λt的Poisson分布。

证明 实际上

$$P(x_t \leqslant k) = P(T_1 + \cdots + T_{k+1} > t). \tag{8}$$

由于T_i相互独立及（7），故$T_1 + \cdots + T_{k+1}$具有密度函数（见习题1）

$$f(y) = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} y^k e^{-\lambda y}, \quad y \geqslant 0.$$

故由（8）得

$$P(x_t \leqslant k) = \int_t^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^{k+1} y^k e^{-\lambda y} \cdot dy$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

从而

$$P(x_t = k) = P(x_t \leqslant k) - P(x_t \leqslant k-1)$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (9)$$

任意固定 $s \geqslant 0$，令W_1，W_2，…为自 s 开始顾客相继到达服务站的间隔时间。

引理 2 W_1，W_2，…独立同分布，其分布函数与T_n的分布函数相同，即

$$P(W_n \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

证明 由W_1的定义及$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$，我们有

$$\{W_1 \leqslant t_1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s < S_n \leqslant s + t_1 < S_{n+1}\}. \qquad (10)$$

实际上，如 $s < S_n \leqslant s + t_1 < S_{n+1}$，则第 n 个顾客在$(s, s+t_1]$区间内到达，故$W_1 \leqslant t_1$。反之，如$W_1 \leqslant t_1$，则在$(s, s+t_1]$区间内有顾客到达服务站。从而在此时间内必有最后一个顾客（否则就有$\sum_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$。但据强大数定律，此事件发生的概率为 0）。今设这最后来到的顾客是第 n 个顾客，则有 $s < S_n \leqslant s + t_1 < S_{n+1}$。故 (10) 得证。因此

$$P(W_1 \leqslant t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(s < S_n \leqslant s + t_1 < S_{n+1}). \qquad (11)$$

但是

$$P(s < S_n \leqslant s + t_1 < S_{n+1})$$

$$= P(s < S_n \leqslant s + t_1;\ S_n + T_{n+1} > s + t_1)$$

$$= \iint\limits_{\substack{s < u < s + t_1 \\ u + v > s + t_1}} f_n(u) f(v)\, du dv,$$

其中　$f_n(u)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-\lambda u}(u\geqslant 0)$是$S_n$的分布密度函数（见习题1），$f(v)=\lambda e^{-\lambda v}(v\geqslant 0)$是$T_{n+1}$的分布密度函数（见（7）式）。故由（11）得

$$
\begin{aligned}
P(W_1\leqslant t_1)= & \sum_{n=1}^{\infty}\int_{s<u<s+t_1} f_n(u) \\
& \left[\int_{s+t_1-u}^{\infty} f(v)dv\right]du \\
= & \sum_{n=1}^{\infty}\int_s^{s+t_1} f_n(u)e^{-\lambda(s+t_1-u)}du \\
= & \int_s^{s+t_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)\right)e^{-\lambda(s+t_1-u)}du \\
= & \lambda\int_s^{s+t_1}e^{-\lambda(s+t_1-u)}du \\
= & \lambda\int_0^{t_1}e^{-\lambda y}dy \quad （令 y=s+t_1-u） \\
= & 1-e^{-\lambda t_1}=F(t_1)。
\end{aligned} \tag{12}
$$

可见W_1与T_n有相同的分布。其次

$$
\begin{aligned}
& \{W_1\leqslant t_1,\ \cdots,\ W_k\leqslant t_k\} \\
= & \bigcup_{n=0}^{\infty}\{S_n\leqslant s<S_{n+1}\leqslant s+t_1,\ T_{n+2}\leqslant t_2, \\
& T_{n+3}\leqslant t_3,\ \cdots,\ T_{n+k}\leqslant t_k\},
\end{aligned} \tag{13}
$$

实际上，上式左方显然包含右方。反之，如$W_1\leqslant t_1$，$W_2\leqslant t_2$，…，$W_k\leqslant t_k$，则在$(s,\ s+t_1)$区间内有顾客到达，因此在这区间内必有一个最早到达的顾客，设这最早的是第$n+1$个顾客，则我们有$S_n\leqslant s<S_{n+1}\leqslant s+t_1$，而且这时有$W_i=T_{n+i}$，$i=2,\ 3,\ \cdots$，故（13）成立。于是由（13）并注意$T_n$相互独立，我们得

$P(W_1\leqslant t_1,\ \cdots,\ W_k\leqslant t_k)$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leqslant s < S_{n+1} \leqslant s+t_1)\right\} \prod_{i=2}^{k} F(t_i)$$

$$=P(W_1 \leqslant t_1) \prod_{i=2}^{k} F(t_i)$$

$$=\prod_{i=2}^{k} F(t_i). \tag{14}$$

最后一个等式由（12）得。

在（14）中固定 j 并令 $t_i \longrightarrow \infty(i \neq j)$，即知 W_j 相互独立且有相同的分布函数 $F(t)$。引理得证。

引理 2 说明，如果我们从某一时刻 s 开始计算顾客来到的次数，那么它与我们从时刻 0 开始计算是一样的（指来到的人数有相同的分布）。特别，我们由此得知 $x_{s+h}-x_s$ 与 x_h 有相同的分布。这一点我们将在定理 1 的证明中用到。

引理 3 W_1 与 x_s 独立。

证明 用归纳法证之。注意

$$P(x_s=0, W_1 \leqslant t_1)=P(s<T_1 \leqslant s+t_1)=e^{-\lambda s}-e^{-\lambda(s+t_1)}$$
$$=e^{-\lambda s}(1-e^{-\lambda t_1})=P(x_s=0)P(W_1 \leqslant t_1). \tag{15}$$

今设对一切 $s>0$，$t_1 \geqslant 0$ 成立

$$P(x_s=n-1, W_1 \leqslant t_1)=P(x_s=n-1)P(W_1 \leqslant t_1), \tag{16}$$

则

$$P(x_s=n, W_1 \leqslant t_1)=P(T_1+\cdots$$
$$+T_n \leqslant s<T_1+\cdots+T_{n+1} \leqslant s+t_1)$$
$$=\int \cdots \int_A \lambda^{n+1} e^{-\lambda(y_1+\cdots+y_{n+1})} d y_1 \cdots d y_{n+1},$$

其中

$A=\{(y_1, \cdots, y_{n+1}),\ 0 \leqslant y_1 \leqslant t_1,\ y_i \geqslant 0,\ i=2, \cdots, n+1;$

$$y_2+\cdots+y_n < s-y_1 < y_2+\cdots+y_{n+1} \leqslant s+t_1-y_1\}.$$

因此

$$P\{x_s=n,\ W_1\leqslant t_1\}=\int_0^s \lambda e^{-\lambda y_1} P\{T_2+\cdots$$

$$+T_n\leqslant s-y_1<T_2+\cdots+T_{n+1}\leqslant s+t_1-y_1\}dy_1$$

$$=\int_0^s \lambda e^{-\lambda y_1} P\{x(s-y_1)=n-1,W_1^*\leqslant t_1\}dy_1,$$

其中W_1^*表示自$s-y_1$时刻开始到第一个顾客来到的时间间隔。据引理2，W_1^*与W_1有相同的分布，再由归纳法假定（16），上式右方等于

$$P(W_1^*\leqslant t_1)\int_0^s \lambda e^{-\lambda y_1} P\{x(s-y_1)=n-1\}dy_1$$

$$=P(W_1\leqslant t_1)\int_0^s \lambda e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda(s-y_1)}\frac{[\lambda(s-y_1)]^{n-1}}{(n-1)!}dy_1$$

$$=P(W_1\leqslant t_1)e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}=P(W_1\leqslant t_1)P(x_s=n).$$

引理得证。

定理1 例1中的$\{x_t\}$是Poisson过程。

证明 分两步，先证

（i）x_s，W_1，W_2，…相互独立。为此计算

$$P\{x_s=n,\ W_1\leqslant t_1,\ \cdots,\ W_k\leqslant t_k\}$$

$$=P\left\{\sum_{i=1}^n T_i\leqslant s<\sum_{i=1}^{n+1} T_i\leqslant s+t_1,\ T_{n+2}\leqslant t_2,\right.$$

$$\left.\cdots,\ T_{n+k}\leqslant t_k\right\}$$

$$=P\left\{\sum_{i=1}^n T_i\leqslant s<\sum_{i=1}^{n+1} T_i\leqslant s+t_1\right\}\prod_{i=2}^k P(T_{n+i}\leqslant t_i)$$

$$=P\{x_s=n,\ W_1\leqslant t_1\}\prod_{i=2}^k P(T_{n+i}\leqslant t_i),$$

最后一等式是因所有W_i与T_i有相同的分布，再由引理3，我们得

$$P\{x_t=n,\ W_i\leqslant t_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$$

$$=P(x_t=n)\prod_{i=1}^{k}P(W_i\leqslant t_i),$$

故（i）得证。

（ii）今证$\{x_t\}$是Poisson过程。根据（9）式，x_h具有参数为λh的Poisson分布。又由引理2，$x_{t+h}-x_t$与x_h具有相同的分布，即得证（1）式成立。往下证明$\{x_t\}$是独立增量过程。

对任意$0\leqslant t_1<t_2$及$k_1,\ k_2\geqslant 0$

$$P\{x_{t_1}=k_1,\ x_{t_2}-x_{t_1}=k_2\}$$

$$=P\left\{x_{t_1}=k_1,\ \sum_{i=1}^{k_2}W_i\leqslant t_2-t_1<\sum_{i=1}^{k_2+1}W_i\right\}$$

由（i），上式右方为

$$P(x_{t_1}=k_1)P\left\{\sum_{i=1}^{k_2}W_i\leqslant t_2-t_1<\sum_{i=1}^{k_2+1}W_i\right\}$$

$$=P(x_{t_1}=k_1)P(x_{t_2}-x_{t_1}=k_2). \tag{17}$$

（17）式表明x_{t_1}与$x_{t_2}-x_{t_1}$独立。

设$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m$且$m$个量$x_{t_1}$，$x_{t_2}-t_{t_1}$，$\cdots$，$x_{t_m}-x_{t_{m-1}}$相互独立，往证$x_{t_1}$，$x_{t_2}-x_{t_1}$，$\cdots$，$x_{t_m}-x_{t_{m-1}}$，$x_{t_{m+1}}-x_{t_m}$相互独立，其中$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}$。对任意$k_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,m+1$，有

$$P\{x_{t_1}=k_1,\ x_{t_2}-x_{t_1}=k_2,\ \cdots,\ x_{t_{m+1}}-x_{t_m}=k_{m+1}\}$$

$$=P\left\{x_{t_1}=k_1,\ \sum_{i=1}^{k_2}W_i\leqslant t_2-t_1<\sum_{i=1}^{k_2+1}W_i,\right.$$

$$\sum_{i=1}^{k_2+k_3}W_i\leqslant t_3-t_1<\sum_{i=1}^{k_2+k_3+1}W_i,\ \cdots,$$

$$\left.\sum_{i=1}^{k_2+\cdots k_{m+1}} W_i \leqslant t_{m+1}-t_1 < \sum_{i=1}^{k_2+\cdots k_{m+1}+1} W_i\right\}$$

$$=P(x_{t_1}=k_1)P\{x_{t_2-t_1}=k_2, \cdots, x_{t_{m+1}-t_1}-x_{t_m-t_1}=k_{m+1}\}$$

最后一等式是由（i）及W_i与T_i同分布而得。由归纳法假设及$x_{t+h}-x_t$与x_h同分布知上式右方为

$$P(x_{t_1}=k_1)\prod_{i=2}^{m+1} P(x_{t_i-t_1}-x_{t_{i-1}-t_1}=k_i)$$

$$=P(x_{t_1}=k_1)\prod_{i=2}^{m+1} P(x_{t_i}-x_{t_{i-1}}=k_i)$$

可见$\{x_t\}$是独立增量过程。

性质Ⅵ和定理1比较清晰地刻划了Poisson过程的结构。

例1中“服务站”的含义是广泛的，它可代表诸如港口、售票处、电话局等等，相应的“顾客”可代表轮船、旅客、用户的呼唤等等。如果例1中的随机变量T_n（称为第n个顾客的等待时间）的分布函数$F(t)$不限定为指数型的，而代以其它的分布函数，则所得的随机过程$\{x_t\}$称为（一般地）更新过程。它在可靠性理论、排队论等中均有广泛的应用。更新过程的直观背景如下：设某机器中有一元件（或零件），它在使用过程中可能发生故障(损坏)。设故障发生的时间为$0=S_0<S_1<\cdots<S_n<\cdots$。当发生故障时即换上新的同样的元件使机器继续正常工作(这一步骤称为元件的更新)。S_n即为第n次更新时间。如设更新所需时间为零（即更新是瞬时完成的），令$T_n=S_n-S_{n-1}$（从而$S_n=T_1+\cdots+T_n$），它表示第n个元件的寿命。以x_t表示$[0, t]$时间内更新元件的次数，则$\{x_t\}$就是更新过程。一般情况下假定T_n，$n=1, 2, \cdots$是独立同分布的，这就是说在开始$t=0$时，使用一个新的元件且所有元件的寿命相同。如开始元件并不是新的(或者元件使用一段时间后才开始观察)，则要假定T_1与T_n，$n=2, 3, \cdots$有不同的分布。

习　题

1. 设$T_1, T_2, \cdots, T_n$为独立同分布的非负随机变量。$P(T_i > t) = e^{-\lambda t}$，$\lambda > 0$。证明$T_1 + \cdots + T_n$的分布密度为

$$f(y) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} \quad (y \geqslant 0)。$$

提示　T_i的分布密度为$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} (y \geqslant 0)$，$T_1 + T_2$的密度函数是$g(y)$与自身的卷积

$$g * g(y) = \int_0^{\infty} g(y) g(y-u) du = \lambda^2 y e^{-\lambda y},$$

再用归纳法求g的n重卷积。

2. 设$\{x_t\}$与$\{y_t\}$为相互独立的Poisson过程，且$Ex_t = \lambda_1 t$，$Ey_t = \lambda_2 t$。试问$\{x_t + y_t\}$，$\{x_t - y_t\}$及$\{x_t + c\}$，其中c为正整数，哪个过程是Poisson过程？求该过程的参数。

3. 设$X, y_1, y_2, \cdots$为一列相互独立的随机变量。其中X有参数为λ的Poisson分布，$y_1, y_2, \cdots$有相同的在[0，1]上的均匀分布。定义

$$x_t = \sum_{i=1}^{X} I_{(0,t)} y_i,$$

其中$I_{(0,t)}$表示[0，t]的示性函数，试证$\{x_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$为Poisson过程。

提示　对$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$，有

$$P(x_{t_i} - x_{t_{i-1}} = k_i,\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{k_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}$$

其中　$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$。

4. 设$\{x_t\}$为更新过程，证明对更新函数Ex_t有$Ex_t = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leqslant t)$。

其中

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n.$$

提示 注意$x_t \geqslant k$当且仅当$S_k \leqslant t$，又

$$Ex_t = \sum_{k=1}^{\infty} kP(x_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(x_t \geqslant k).$$

5. 设在某一公路上，汽车运输流动为强度等于每分钟30辆的Poisson流(强度即指参数λ)。试求n辆汽车(一辆接一辆)通过观察岗的时间需要多于N秒的概率。

提示 利用题1，所求的概率等于

$$\frac{1}{(n-1)!\,2^n}\int_N^{\infty} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy.$$

6. 设x_t表示Poisson流在$[0, t]$时间区间内发生的事件的个数。试求在已知$x_t = n$的条件下，第r($r < n$)个事件发生的时间T_r的分布密度。

提示 设$\{x_t\}$的参数为λ，考虑$0 < s < t$，则$T_r \leqslant s$当且仅当$x_s \geqslant r$. 故

$$P(T_r \leqslant s, x_t = n) = P(x_s \geqslant r, x_t = n).$$

经计算后，可得T_r的分布密度为

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \dfrac{s^{r-1}}{t^r}\left(\dfrac{t-s}{t}\right)^{n-r}, & 0 < s < t, \\ 0, & s \geqslant t, \end{cases}$$

7. 设$\{x_t\}$为例1中的Poisson过程。任取$t > 0$，定义$W_t = S_{x(t)+1} - t$，$U_t = t - S_{x(t)}$，$V_t = U_t + W_t$。换言之，W_t表示自t开始到(第一个)顾客来到的时间间隔(见(10)的W_1)。U_t表示在t或t之前最后一个顾客到达至t这段时间的长度(如$[0, t]$区间无顾客来到则$U_t = t$)。V_t表示t之前最后一个顾客到t之后第一个顾客到达的时间间隔。试证

(i) $$P(W_t > s) = e^{-\lambda s};$$

(ii) $$P(U_t \leqslant s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & 0 \leqslant s < t, \\ 1, & t \leqslant s, \end{cases}$$

并求EU_t;

(iii) $P(W_t > s, U_t > r) = \begin{cases} e^{-\lambda(s+r)}, & s > 0, \ 0 < r < t, \\ 0, & t \leqslant r; \end{cases}$

(iv) 求V_t的分布密度，并求$\lim\limits_{t\to\infty} EV_t$。

提示 (i) $\{W_t > s\} = \{x_{t+s} - x_t = 0\}$；

(ii) $U_t \leqslant t$ 且对$0 \leqslant s < t$ 有$\{U_t > s\} = \{x_t - x_{t-s} = 0\}$，$EU_t = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$；

(iii) 对 $s > 0$，$0 < r < t$ 有$\{U_t > r, W_t > s\} = \{x_{t+s} - x_{t-r} = 0\}$；

(iv) 先证U_t与W_t独立，再用 (i)，(ii) 推出V_t的分布密度为

$$g(s) = \begin{cases} \lambda^2 s e^{-\lambda s}, & 0 \leqslant s < t, \\ \lambda(1 + \lambda t) e^{-\lambda s}, & t \leqslant s, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} E V_t = 2/\lambda.$$

§6.4 Wiener过程（Brown运动）

设$X = \{x_t\}$是一个 Wiener 过程。前面已指出，无论初始状态如何，它总是具有 Wiener 转移函数的齐次马氏过程。本节假设它是标准齐次马氏过程。

对任意 $0 \leqslant s \leqslant t$，因 $x_t - x_s$具有$\mathscr{N}(0, \sigma\sqrt{(t-s)})$ 分布，故

$$D(x_t - x_s) = E(x_t - x_s)^2 = \sigma^2(t-s). \qquad (1)$$

下面将分段研究 Wiener 过程的一些重要性质。

(一) 轨道性质

由 (1)，对固定的 $t \geqslant 0$，

$$\lim_{s\to t} E|x_s - x_t|^2 = \lim_{s\to t} \sigma^2|t-s| = 0. \qquad (2)$$

故它是随机连续的（对 P_i，$i \in E$，也如此）。

定理 1 设$X = \{x_t\}$是 Wiener 过程。则存在修正 $\tilde{X} = \{\tilde{x}_t\}$，它的几乎一切轨道是连续的。

证明 由 §1.2 知，存在可分修正，记为 $\tilde{X} = \{\tilde{x}_t\}$。由 (1)，

$\tilde{X}$ 满足 § 1.3 定理 1 的条件，因此 $\tilde{X}$ 的几乎一切轨道都是连续的。

事实上，若记 $A=\{\omega:\tilde{x}(\cdot,\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续$\}$ 则 $P(A)=1$。定义

$$\bar{x}_t(\omega)=\begin{cases}\tilde{x}_t(\omega), & \text{如}\ \omega\in A,\\ 0, & \text{如}\ \omega\notin A.\end{cases} \tag{3}$$

则 $\bar{X}=\{\bar{x}_t\}$ 的一切轨道都是连续的。显然，它也是过程的一个修正。由 § 6.1 定理 2 的系知它还是 Feller 的，因而它是强马氏过程。

虽然可分 Wiener 过程的样本函数 $\{x_t\}$ 以概率 1 连续，但它却处处不可导。

定理 2 X 的几乎所有的样本函数在 $[0,\infty)$ 上处处不可导。

证明 令

$$D=\{\omega: x(t,\omega)\text{至少在某一点}\ t\in T\ \text{可导}\},$$

其中 $T=[0,\infty)$。

$$D_n=\{\omega: x(t,\omega)\text{至少在某一点}\ t\in[n,\ n+1)\ \text{可导}\}.$$

显然，$D=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}D_n$，故只要 $P(D_n)=0$ 即可得证 $P(D)=0$。我们只需证 $P(D_0)=0$，对 D_n，$n\geqslant 1$ 的证明相同。对固定的整数 $k>0$，令

$$A_k=\left\{\omega:\text{至少对某一}\ t\in[0,1),\ \overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{|x_{t+h}(\omega)-x_t(\omega)|}{h}<k\right\}.$$

易见 $D_0\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，故问题化为证明 $P(A_k)=0$。任取 $\omega\in A_k$，则存在 $t\in[0,1)$ 及 $\delta>0$，当 $0<h<\delta$ 时，有

$$|x(t+h,\omega)-x(t,\omega)|<kh. \tag{4}$$

故可取适当的正整数 m，对某 $j\ (1\leqslant j\leqslant m)$ 有

$$\frac{j-1}{m}\leqslant t\leqslant\frac{j}{m}, \quad \frac{j+3}{m}-t<\delta, \tag{5}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left|x\left(\frac{j+1}{m}, \omega\right)-x\left(\frac{j}{m}, \omega\right)\right| \\
&\leqslant\left|x\left(\frac{j+1}{m}, \omega\right)-x(t, \omega)\right| \\
&+\left|x(t, \omega)-x\left(\frac{j}{m}, \omega\right)\right| \\
&\leqslant k\cdot\frac{2}{m}+k\cdot\frac{1}{m} \\
&=\frac{3k}{m},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\left|x\left(\frac{j+2}{m}, \omega\right)-x\left(\frac{j+1}{m}, \omega\right)\right| \\
&\leqslant\left|x\left(\frac{j+2}{m}, \omega\right)-x(t, \omega)\right| \\
&+\left|x(t, \omega)-x\left(\frac{j+1}{m}, \omega\right)\right| \\
&\leqslant k\cdot\frac{3}{m}+k\cdot\frac{2}{m} \\
&=\frac{5k}{m},
\end{aligned} \tag{7}$$

同理 $$\left|x\left(\frac{j+3}{m}, \omega\right)-x\left(\frac{j+2}{m}, \omega\right)\right|\leqslant\frac{7k}{m}, \tag{8}$$

因为

$$P(|x_{t+h}-x_t|<a)=P\left(\frac{|x_{t+h}-x_t|}{\sigma\sqrt{h}}<\frac{a}{\sigma\sqrt{h}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma\sqrt{h}}}^{\frac{a}{\sigma\sqrt{h}}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\leqslant\frac{2a}{\sigma\sqrt{2\pi h}}, \tag{9}$$

如令

$B_{m,j}=\{\omega$：使不等式（6），（7），（8）同时成立$\}$，则由（9）及增量的独立性，我们得

$$P(B_{m,j})\leqslant\left\{\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi/m}}\right\}^3\cdot\frac{3k}{m}\cdot\frac{5k}{m}\cdot\frac{7k}{m}$$

$$=c\cdot m^{-3/2}(c>0)。\qquad(10)$$

记

$$B_m=\bigcup_{j=1}^{m}B_{m,j},$$

由（10），$P(B_m)\leqslant\sum_{j=1}^{m}P(B_{m,j})\leqslant c\cdot m^{-1/2}$。故如取 $m=n^4$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(B_{n^4})\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}<\infty,$$

因此，由 Borel-Cantelli 引理得知

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}B_{n^4})=0,\qquad(11)$$

但是

$$A_k\subset\underline{\lim_{m\to\infty}}B_m\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}B_{n^4}\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}B_{n^4},$$

所以由（11）知 $P(A_k)=0$。定理得证。

系（i）对 $a>0$，$\{x_t\}$ 的几乎所有样本函数在$[0,a]$上的全变差非有限。

（ii）对几乎所有 ω，不存在区间(a,b)，$0\leqslant a<b<\infty$，使 $x(t,\omega)$ 在其上单调。

证明 因为在$[0,a]$中有界变差或在(a,b)中单调的函数是几乎处处可导的。

关于 Wiener 过程样本函数的另外一些重要性质将放在习题里。

(二) 几种变换

定义 1 称过程X是标准 Wiener 过程，如果以下条件满足：

1° X是 Wiener 过程，且 $x_t - x_s$ 是 $\mathcal{N}(0, \sqrt{|t-s|})$分布。

2° X的一切轨道是连续的（在 $t=0$ 点右连续）。

3° $x_0 = 0$。

设X是标准 Wiener 过程，对它施行一些变换，得到下面几个新的过程

（Ⅰ）对$c>0$

$$x_1(t) = cx(t/c^2);$$

（Ⅱ）$x_2(t) = \begin{cases} tx(1/t), & t>0, \\ 0, & t=0; \end{cases}$

（Ⅲ）对$h>0$，

$$x_3(t) = x(t+h) - x(h);$$

（Ⅳ）$x_4(t) = -x(t)$。

上述每一个过程都是标准 Wiener 过程。

定理 3 若X是标准 Wiener 过程，则过程X_1，X_2，X_3，X_4均是标准 Wiener 过程。

先证X_1是标准 Wiener 过程。

对任意 $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，令 $t_i' = \frac{t_i}{c^2}$ 则 $0 \leqslant t_0' < t_1' < t_2' < \cdots < t_n'$。由$X$的独立增量性得，$x_{t_0'}$，$x_{t_1'} - x_{t_0'}$，…，$x_{t_n'} - x_{t_{n-1}'}$相互独立。此即表明$x_1(t_0)$，$x_1(t_1) - x_1(t_0)$，…，$x_1(t_n) - x_1(t_{n-1})$相互独立。此外，对任意$s<t$，$x_1(t) - x_1(s) = c(x_{t'} - x_{s'})$ 其中$t' = \frac{t}{c^2}$，$s' = \frac{s}{c^2}$。因而它具有$\mathcal{N}(0, c\sqrt{t'-s'})$分布。但$c^2(t'-s') = t-s$，故$x_1(t) - x_1(s)$具有$\mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$分布。又$x_1(0) = cx(0) = 0$，且由$X$轨道的连续性易见$X_1$也是。因而$X_1$是一个标准 Wiener 过程。

下证 X_2 是标准 Wiener 过程。

对任一 $t>0$，因 X 是标准 Wiener 过程故 x_t 具有 $\mathscr{N}(0,\sqrt{t})$ 分布。因而 $x_2(t)=tx(t')$，其中 $t'=\frac{1}{t}$ 具有 $\mathscr{N}(0,\sqrt{t^2\cdot t'})$ 分布，但 $t^2\cdot t'=t$ 即它具有 $\mathscr{N}(0,\sqrt{t})$ 分布。

又因 $Ex_sx_t=s\wedge t$，故

$$Ex_2(s)x_2(t)=s\cdot t\cdot\frac{1}{t}\wedge\frac{1}{s}=s\wedge t. \tag{12}$$

对任意 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，及实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_2(t_i)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i t_i x\left(\frac{1}{t_i}\right).$$

令 $t_i'=\frac{1}{t_i}$，$\alpha_i'=\alpha_i t_i$，则上式右方为

$$\sum\alpha_i' x(t_i').$$

因 X 是标准 Wiener 过程，故它是一个正态过程（习题 1），因而由 § 2.1的引理 2 知上式表示的随机变数具有正态分布。再次运用此引理及 α_i 和 t_i 的任意性知，X_2 是一个正态过程。对任意

$$0\leqslant t_1<t_2<t_3<t_4,$$

由（12）经计算得

$$E\{x_2(t_2)-x_2(t_1)\}\{x_2(t_4)-x_2(t_3)\}=0.$$

故 X_2 是一个独立增量过程。再由 $E(x_2(t)-x_2(s))^2=|t-s|$ 得知它是一个 Wiener 过程。由定义 $x_2(0)=0$，而且 X_2 的一切轨道在 $(0,\infty)$ 上连续。最后只需证明 X_2 在 $t=0$ 处右连续。这留作习题。

关于 X_3，X_4 是标准 Wiener 过程的证明也留作习题。

（三）几个重要的分布

关于过程 X，除了本节开始所作假设外，再补设一切轨道是连续的，$\sigma=1$。

设 $A\in\mathscr{B}$，令

$$\tau_A=\begin{cases}\inf\{t,\ t\geqslant 0,\ x_t\in A\}\\ \infty,\ 如上集空。\end{cases}\tag{12}$$

称 τ_A 为**首达 A 的时间**。在§ 4.4 中，对 A 具有形式 $[a,\infty)$（或 $(-\infty,\ a]$）已证明它是 $\{\mathscr{N}_t\}$ 停时，下面将对 A 是一般闭集证明该结论。

定理 4　设 A 是闭集，则上面所定义的 τ_A 是 $\{\mathscr{N}_t\}$ 停时。

证明　置 $A_n=\{x\in E: d(x,A)<1/n\}$，其中 $d(x,A)=\inf(|y-x|: y\in A)$。易见 A_n 是开集且着 $n\to\infty$ 时 $A_n\downarrow A$。以 Q^+ 表示非负有理数，那么有

$$\begin{aligned}(\tau_A\leqslant t)&=\{x_s\in A,\ 对某些\ s\in[0,\ t]\}\\ &=\{x_s\in\bigcap_n A_n,\ 对某些\ s\in[0,t]\}\\ &=\bigcap_n\{x_s\in A_n,\ 对某些\ s\in[0,t]\}\\ &=\bigcap_n\{x_s\in A_n,\ 对某些\ s\in[0,t]\cap Q^+\}\in\mathscr{N}_t.\end{aligned}\tag{13}$$

(13)式中最后一个等式的成立是由于 A_n 是开集且 x_t 的轨道连续之故。至于第三个等号为何成立，我们留作习题，让读者自己去证明。

特别地，取 $A=\{a\}$，$a\in E$ 得到 $\tau_{\{a\}}$ 是 $\{\mathscr{N}_t\}$ 停时。

引理 1　对任一 $t>0$ 及 $x\in E$，

$$P_x(\tau_{\{a\}}=t)=0.$$

证明　由轨道连续性有

$$(\tau_{\{a\}}=t)\subseteq(x_t=a).\tag{14}$$

故

$$\begin{aligned}P_x(\tau_{\{a\}}=t)&\leqslant P_x(x_t=a)\leqslant P_x\{x_t\in(a-\delta,a+\delta)\}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{a-\delta}^{a+\delta}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy.\end{aligned}\tag{15}$$

上式两边令 $\delta\to 0$ 得 $P_x(\tau_{\{a\}}=t)=0$。

引理 2　对任一有界连续函数 f，$T_tf(x)$ 关于 (t,x)，t

$\geqslant 0$，$x \in E$ 是二元连续函数。

证明

$$T_t f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy.$$

令 $\frac{y-x}{\sqrt{t}} = z$，得

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} f(x + \sqrt{t}\, z) dz.$$

由 f 的连续性及控制收敛定理推出命题结论。

引理 3 对任意 $t > 0$，$x \in E$ 及有界连续函数 f 有

$$E_x\{\tau_{(a)} \leqslant t;\ f(x_t)\} = E_x\{\tau_{(a)} \leqslant t;\ E_a f(x_{t-\tau_a})\}. \tag{16}$$

证明 由引理 1 得

$$P_x\{(\tau_{(a)} \leqslant t)\Delta(\tau_{(a)} < t)\} = 0. \tag{17}$$

"Δ" 表示对称差。以下简记 $\tau_{(a)}$ 为 τ_a。

对 $n \geqslant 1$，令

$$\tau_a^{(n)} = \begin{cases} k/2^n, & \text{若} \frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau_a < \frac{k}{2^n},\ k = 1, 2, \cdots, \\ \infty, & \text{若} \tau_a = \infty. \end{cases}$$

$\{\tau_a^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ 是停时列且 $\tau_a^{(n)} \downarrow \tau_a$。我们有

$$(\tau_a < t) = \bigcup_n (\tau_a^{(n)} < t) \tag{18}$$

因此，由 (17) 得

$$E_x\{\tau_a \leqslant t;\ E_a f(x_{t-\tau_a})\} = E_x\{\tau_a < t;\ E_a f(x_{t-\tau_a})\}. \tag{19}$$

另一方面

$$E_x\{\tau_a^{(n)} < t;\ f(x_t)\} = \sum_{k/2^n < t} E_x\left\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau_a < \frac{k}{2^n};\ f(x_t)\right\} \tag{20}$$

因 $\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau_a < \frac{k}{2^n}\right) \in \mathscr{N}_{\frac{k}{2^n}}$，

故由马氏性得（20）右方为

$$\sum_{\frac{k}{2^n}<t} E_x\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau_a<\frac{k}{2^n};\ E_{x\left(\frac{k}{2^n}\right)}f\left(x_{t-\frac{k}{2^n}}\right)\right\}$$

$$=E_x\{\tau_a^{(n)}<t;E_{x(\tau_a^{(n)})}f(x_{t-\tau_a^{(n)}})\},\tag{21}$$

因f是有界连续函数。由(18)和引理2，(21)式两边令$n\to\infty$得

$$E_x\{\tau_a<t;f(x_t)\}=E_x\{\tau_a<t;\ E_af(x_{t-\tau_a})\}.\tag{22}$$

上式中E_a的得来是由于$x_{\tau_a}=x_a$之故。由（17），（19）和(22)得证命题。

系 对任一有界可测函数f有

$$E_x\{\tau_a\leqslant t;f(x_t)\}=E_x\{\tau_a\leqslant t;E_af(x_{t-\tau_a})\}.\tag{23}$$

证明 由引理3及附篇定理5得到（23）式。

定理5 对任一$y\in E$，首达集$\{y\}$的时间τ_y关于$P_x(x\neq y)$具有分布密度

$$p(t)=\frac{|y-x|}{(2\pi t^3)^{1/2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.\tag{24}$$

证明 先考虑$x<y$的情形。由轨道连续性得

$$(x_t>y)\cap(x_0=x)\subseteq(x_0=x)\cap(\tau_y\leqslant t),\tag{25}$$

因此

$$P_x\{x_t>y\}=P_x\{\tau_y\leqslant t;x_t>y\}$$
$$=E_x\{\tau_y\leqslant t;I_{(y,\infty)}(x_t)\}=E_x\{\tau_y<t;I_{(y,\infty)}(x_t)\},$$

由（23），上式右方为

$$E_x\{\tau_y<t;P_y(x_{t-\tau_y}>y)\}.\tag{26}$$

因对任一$s>0$，

$$P_y(x_s>y)=\int_y^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{(y-z)^2}{2s}}dz=\frac{1}{2},$$

故

$$E_x\{\tau_y < t;\ P_y(x_{t-\tau_y} > y)\}$$
$$= \frac{1}{2} P_x(\tau_y < t). \tag{27}$$

因此，

$$P_x(\tau_y \leqslant t) = P_x(\tau_y < t) = 2P_x(x_t > y)$$
$$= 2\int_y^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} dz$$
$$= 2\int_{|y-x|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz,$$

令 $s = \frac{t(y-x)^2}{z^2}$，上式右方化为

$$\int_0^t |y-x|(2\pi s)^{-3/2} e^{-\frac{(y-x)^2}{2s}} ds. \tag{28}$$

对 $y < x$，类似的推导也可得（28）式。此即得证命题。

由此命题易见，对 $x \neq y$

$$P_x(\tau_y < \infty) = 1,$$

但

$$E_x \tau_y = \infty.$$

设实数 $a < b$，令集 $B = E \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$，以 τ_B 表示首达集合 B 的时间，即

$$\tau_B = \begin{cases} \inf\{t,\ t \geqslant 0,\ x_t \in B\}, \\ \infty, \text{ 如上集空.} \end{cases}$$

若以 $\tau_{(-\infty, a]}$ 和 $\tau_{[b, \infty)}$ 分别表示首达集（$-\infty, a$］和［b, ∞）的时间。则 $\tau_B = \tau_{(-\infty, a]} \wedge \tau_{[b, \infty)}$。因此它是 $\{\mathscr{N}_t\}$ 停时。

定理 6 存在 $\varepsilon > 0$，使

$$\sup_{x \in (a, b)} E_x e^{\varepsilon \tau_B} < \infty. \tag{29}$$

证明

$$\sup_{x \in (a, b)} P_x(\tau_B > t) \leqslant \sup_{x \in (a, b)} P_x\{x_t \in (a, b)\}$$

$$= \sup_{x\in(a,b)} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy \leqslant \frac{(b-a)}{\sqrt{2\pi t}}. \quad (30)$$

取 t 充分大，可使 $\frac{(b-a)}{\sqrt{2\pi t}} \leqslant \frac{1}{2}$，取 t_0 适合这个条件。由马氏性，对 $x\in B$ 和 $n\geqslant 1$ 有

$$P_x(\tau_B>(n+1)t_0)=P_x\{\tau_B>nt_0; \tau_B>(n+1)t_0\}. \quad (31)$$

在集合 $(\tau_B>nt_0)$ 上，$\tau_B=nt_0+\tau_B\circ\theta_{nt_0}$ 且 $x_{nt_0}\in(a,b)$ 因此，由马氏性，

$$P_x(\tau_B>(n+1)t_0)=E_x\{\tau_B>nt_0, P_{x_{nt_0}}(\tau_B>t_0)\}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}P_x(\tau_B>nt_0),$$

由归纳法得

$$P_x(\tau_B>(n+1)t_0)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}. \quad (32)$$

因此

$$E_x e^{\varepsilon\tau_B}=\int_0^\infty e^{\varepsilon z}P_x(\tau_B\in dz)$$
$$\leqslant 1+\sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon(n+1)t_0}P_x(nt_0<\tau_B\leqslant(n+1)t_0)$$
$$\leqslant 1+\sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon(n+1)t_0}2^{-n}.$$

选取 ε 充分小，使上级数收敛，从而得证命题。

系 对 $n\geqslant 1$ 及 $x\in E$，$E_x(\tau_B)^n<\infty$，特别地，$P_x(\tau_B<\infty)=1$。

证明 先考虑 $x\in(a,b)$。由（29）知，存在 $\varepsilon>0$ 使

$$E_x e^{\varepsilon\tau_B}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}E_x(\tau_B)^k<\infty.$$

从而对每一 $n\geqslant 1$，有 $E_x(\tau_B)^n<\infty$，特别地，$P_x(\tau_B<\infty)=1$。

对 $x \notin (a, b)$，由 τ_B 的定义知 $P_x(\tau_B = 0) = 1$，因而命题结论成立。

注意到当 $x \in (a, b)$ 时，由轨道的连续性，有

$$P_x\{\tau_{(-\infty, a]} = \tau_a\} = 1, \quad P_x\{\tau_{[b, \infty)} = \tau_b\} = 1.$$

因而

$$P_x\{\tau_B = \tau_a \wedge \tau_b\} = 1.$$

由此可见，虽然 $E_x\tau_b = \infty$ 和 $E_x\tau_a = \infty$，但

$$E_x\tau_a \wedge \tau_b < \infty.$$

定理 7 对 $a < x < b$ 和 $\lambda > 0$ 有

$$P_x\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{b-x}{b-a}, \quad P_x\{\tau_b < \tau_a\} = \frac{x-a}{b-a}. \tag{33}$$

$$E_x e^{-\lambda\tau_B} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(b-x) + \operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(x-a)}{\operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(b-a)}.$$

证明 由§5.1例3知，对任意实数 α，

$$\{\exp^{(\alpha x_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)}, \mathscr{N}_t, P_x\}$$

是鞅。以下记 $M_\alpha(t) = \exp^{(\alpha x_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)}$，$\tau = \tau_B$。

由 Doob 有界停时定理知

$$\{M_\alpha(t \wedge \tau), \mathscr{N}_t, P_x\} \tag{34}$$

也是鞅。由 X 轨道的连续性得

$$\lim_{t\to\infty} M_\alpha(t \wedge \tau) = M_\alpha(\tau). \tag{35}$$

又

$$\sup_{t \geq 0} E_x M_\alpha^2(t \wedge \tau) < \infty.$$

由附录（二），定理 2，得 $E_x M_\alpha(\tau) < \infty$ 且

$$\lim_{t\to\infty} E_x|M_\alpha(t \wedge \tau) - M_\alpha(\tau)| = 0.$$

因而

$$E_x M_\alpha(\tau) = \lim_{t\to\infty} E_x M_\alpha(t \wedge \tau).$$

由鞅性，
$$E_x M_\alpha(t\wedge\tau)=E_x M_\alpha(0)=e^{\alpha x},$$
故
$$E_x M_\alpha(\tau)=E_x M_\alpha(0)=e^{\alpha x}。\tag{36}$$
记

$$f_{\alpha,a}(x)=E_x\{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau};\ \tau_a<\tau_b\},\tag{37}$$
$$f_{\alpha,b}(x)=E_x\{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau};\ \tau_b<\tau_a\}。$$

注意到
$$P_x\{(x(\tau)=a)\triangle(\tau_a<\tau_b)\}=0,\tag{38}$$
$$P_x\{(x(\tau)=b)\triangle(\tau_b<\tau_a)\}=0。$$
因而由（36），（37）和（38）得
$$e^{\alpha x}=E_x M_\alpha(\tau)=E_x\{x(\tau)=a;\ M_\alpha(\tau)\}+E_x\{x(\tau)=b;\ M_\alpha(\tau)\},$$
即
$$e^{\alpha x}=e^{\alpha a}f_{\alpha,a}(x)+e^{\alpha b}f_{\alpha,b}(x)。\tag{39}$$
对 $-\alpha$ 同样可得
$$e^{-\alpha x}=e^{-\alpha a}f_{\alpha,a}(x)+e^{-\alpha b}f_{\alpha,b}(x),\tag{40}$$
(40)中用到 $f_{\alpha,a}(x)=f_{-\alpha,a}(x)$ 和 $f_{\alpha,b}(x)=f_{-\alpha,b}(x)$。

由（39）和（40）解得

$$f_{\alpha,a}(x)=\frac{e^{\alpha(x-b)}-e^{\alpha(b-x)}}{e^{\alpha(a-b)}-e^{\alpha(b-a)}},\tag{41}$$

$$f_{\alpha,b}(x)=\frac{e^{\alpha(a-x)}-e^{\alpha(x-a)}}{e^{\alpha(a-b)}-e^{\alpha(b-a)}}。\tag{42}$$

因而，由罗毕达法则得

$$P_x(\tau_a<\tau_b)=\lim_{\alpha\to 0}f_{\alpha,a}(x)=\frac{b-x}{b-a},$$

$$P_x(\tau_b<\tau_a)=\frac{x-a}{b-a}。$$

在（36）与（37）中，令 $\alpha=\sqrt{2\lambda}$ 得

$$E_x e^{-\lambda\tau_B}=f_{\sqrt{2\lambda},\,a}(x)+f_{\sqrt{2\lambda},\,b}(x)$$

$$=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(x-a)+\operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(b-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{2\lambda}(b-a)}.$$

系 $$E_x e^{-\lambda\tau_y}=e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}\quad(y\neq x),$$

$$E_x x(\tau)=x,\quad E_x\tau=(b-x)(x-a).$$

证明留作习题。

习　题

1. 设过程$\{x_t\}$的初始值 $x_0=0$，则它是 $\sigma=1$ 的 Wiener 过程的充要条件是：

(i) $\{x_t\}$是正态过程；

(ii)对每一个$t\geqslant 0$，$Ex_t=0$ 且其协方差函数$K(s,t)=s\wedge t$。

提示 利用：如(X,Y)正态且$EX=0$，$EY=0$，则X与Y独立等价于$EXY=0$。

2. 设$\{x_t\}$是标准Wiener过程，试证

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{x_t(\omega)}{t}=0\right)=1.$$

3. 证明第(二)段中定义的X_3和X_4是标准Wiener过程。

4. 求证定理 4 中的(13)式成立。

5. 对$x\neq y$，证明$E_x e^{-\lambda\tau_y}=e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}$，其中$\lambda>0$。

6. 设$a<x<b$，$B=E-(a,b)$，试用§6.4定理7的结果证明

$$E_x x(\tau_B)=x,\ E_x\tau_B=(b-x)(x-a).$$

7. 设A是闭集，定义

$$T_A=\begin{cases}\inf\{t>0,\ x_t\in A\},\\ \infty,\ \text{如上集空。}\end{cases}$$

求证，T_A是$\{\mathscr{N}_t\}$停时，它称为首中集A的时间($\{x_t\}$是标准Wiener过程)。

8. 设$\{x_t\}$是标准Wiener过程，试证

$$P(\sup_{t\geqslant 0}x_t=\infty)=P(\inf_{t\geqslant 0}x_t=-\infty)=1.$$

提示. 利用$P(\tau_a\leqslant t)=P(\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}x_s\geqslant a)$，其中$a>0$以及$-X$仍是标准Wiener过程这一事实。由此题的结论易推出：

$$P\{x_t, t\in[0,\infty)\text{无界}\}=1,$$

$$P\{\text{对任一}b>0,\ x_t\text{在}[b,\infty)\text{中有零点}\}=1.$$

9. 设$\{x_t\}$是标准Wiener过程. 求证，对任一$\varepsilon>0$，有

$$P(\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}x_t>0)=P(\min_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}x_t<0)=1.$$

由此题结论可得

$$P\{\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}x_t>0,\ \text{对一切}\varepsilon>0\}$$

$$=P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}(\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}}x_t>0)\right\}=1$$

以及

$$P\{\min_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}x_t<0;\ \text{对一切}\varepsilon>0\}=1.$$

从而推出几乎一切样本函数在区间$(0,\varepsilon)$中都有零点，其中$\varepsilon>0$是任意给定的。

10. 设$\{x_t\}$是Wiener过程，其一切轨道是连续的，对任一实数c，令

$$S_c(\omega)=\{t;\ t\geqslant0,\ x_t(\omega)=c\},$$

试证：

(i) 对每一个ω，$S_c(\omega)$是闭集且非有界；

(ii) $S_c(\omega)$是Lebesgue零测集。

11. 设$\{x_t\}$是标准Wiener过程，对每一个ω，令

$$Z(\omega)=\int_0^t x_s(\omega)ds,\ \text{则}$$

(i) 对几乎一切ω，$Z(\omega)$是有穷的；

(ii) $EZ=0$，$EZ^2=t^3/3$。

第七章　平稳过程

平稳过程有两种：强平稳过程与弱平稳过程。前者把平稳性条件加在过程的有限维联合分布上，后者则加在过程的一、二阶矩上。本章着重讨论弱平稳过程及其线性性预测问题。

平稳过程的应用范围很广。尤其在通讯理论及各种预报问题里应用较多。

§7.1　预备知识

（一）均方收敛

设已给定概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）。x 是定义在其上的复（或实）值随机变量，$|x|^2=x\bar{x}$ 表示 x 的模的平方，其中 $\bar{x}$ 为 x 的共轭。令

$$\|x\|=\sqrt{E|x|^2},$$

$$\mathscr{H}=\{x:\|x\|<\infty\},$$

则$\mathscr{H}$成一线性空间。

实际上，设 a，b 为任意复（实）数，x，$y\in\mathscr{H}$。由Schwarz不等式

$$\{|Exy|\}^2\leqslant\{E|xy|\}^2\leqslant E|x|^2\cdot E|y|^2<\infty, \tag{1}$$

故

$$\begin{aligned}E|ax+by|^2&=E|ax|^2+E|by|^2+E(ax)\overline{(by)}+E\overline{(ax)}(by)\\&\leqslant E|ax|^2+E|by|^2+2[E|ax|^2\cdot E|by|^2]^{1/2}\\&=(\|ax\|+\|by\|)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

因 $E|ax|^2=|a|^2E|x|^2<\infty$，可见 $ax+by\in\mathscr{H}$。

如在（1）中令 $y=1$，即得

$$E|x|\leqslant\|x\|, \tag{3}$$

由（2）得

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\tag{4}$$

于是知

$$\|x\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|,\tag{5}$$

$$\|y\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|,\tag{6}$$

由（5）、（6）即得

$$\left|\|x\|-\|y\|\right|\leqslant\|x-y\|.\tag{7}$$

定义 1 称 $x_n\in\mathscr{H}$ 均方收敛于 $x\in\mathscr{H}$，如

$$E|x_n-x|^2\to 0\ (n\to\infty),$$

或等价地，如 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$，并记为

$$\text{l.i.m}\,x_n=x \quad 或 \quad x_n\xrightarrow{L_2}x.$$

如 $x_n\xrightarrow{L_2}x$，则在几乎处处相等的意义下，x 是唯一的。这是因为如另有：$x_n\xrightarrow{L_2}y$，由（4）

$$\|x-y\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-y\|\to 0\ (n\to\infty),$$

所以 $x=y$ a.e..

注意，如 $x_n\in\mathscr{H}$ 且 $\|x_n-x\|\to 0$，则必 $x\in\mathscr{H}$。实际上，当 n 充分大时，由（4）

$$\|x\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n\|<\infty.$$

因此，当已知 $x_n\in\mathscr{H}$ 的情况下，我们只需验证 $x_n\xrightarrow{L_2}x$，而不必预先去证明 $x\in\mathscr{H}$。

利用（4）即可证明，如 $x_n\xrightarrow{L_2}x$，$y_n\xrightarrow{L_2}y$，则

$$(\alpha x_n+\beta y_n)\xrightarrow{L_2}\alpha x+\beta y,$$

其中 α，β 为常数（习题 1）。

引理 1 设 $x_n\in\mathscr{H}$，$x_n\xrightarrow{L_2}x$，则

（a）$\lim\limits_{n\to\infty}Ex_n=Ex$；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}E|x_n|^2=E|x|^2$.

证明 由(3),

$$|Ex_n-Ex|\leqslant E|x_n-x|$$
$$\leqslant\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

由(7),

$$\Big|\|x_n\|-\|x\|\Big|\leqslant\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}E|x_n|^2=E|x|^2$.

引理 2 设 x_n, $y_n\in\mathscr{H}$, $x_n\xrightarrow{L_2}x$, $y_n\xrightarrow{L_2}y$. 则

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}Ex_n\bar{y}_m=Ex\bar{y}.$$

证明

$$E|x_n\bar{y}_m-Ex\bar{y}|\leqslant E|x_n\bar{y}_m-x\bar{y}|$$
$$=E|x_n(\bar{y}_m-\bar{y})+(x_n-x)\bar{y}|$$
$$\leqslant E|x_n(\bar{y}_m-\bar{y})|+E|(x_n-x)\bar{y}|$$
$$\leqslant\|x_n\|\cdot\|\bar{y}_m-\bar{y}\|+\|x_n-x\|\cdot\|\bar{y}\|,$$

由引理 1,当 $n\to\infty$, $m\to\infty$时,上式右方趋于 0.

引理 3 (均方收敛准则). 设 $x_n\in\mathscr{H}$, 则下列诸条件等价

(a) $x_n\xrightarrow{L_2}x$;

(b) 存在复数 c, 使

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}Ex_n\bar{x}_m=c;$$

(c) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}E|x_n-x_m|^2=0$.

证明 (a)⇒(b): 由引理 2 即知.

(b)⇒(c): 因为

$$E|x_n-x_m|^2=E|x_n|^2-Ex_n\bar{x}_m-Ex_m\bar{x}_n+E|x_m|^2$$
$$\to c-c-c+c=0\ (n,m\to\infty).$$

(c)⇒(a): 由切比谢夫不等式

$$P(|x_n-x_m|\geqslant \varepsilon)\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}E|x_n-x_m|^2\to 0\ (n, m\to\infty),$$

从而存在子列$\{x_{n_k}\}$及x，使

$$x_{n_k}\to x \quad \text{a. e.},\ (k\to\infty), \tag{8}$$

于是对任给$\varepsilon>0$，由条件（c）存在N，当k，$n>N$时

$$E|x_{n_k}-x_n|^2<\varepsilon.$$

令$k\to\infty$，由(8)及Fatou引理，我们得

$$E|x-x_n|^2\leqslant \varepsilon\ (n>N).$$

（二）二阶矩过程

下面我们定义二阶矩过程及其**均**方连续、导数和积分。**我们**只给出§7.3要用到的关于连续性、可导性及可积性定理，更多的性质见习题。

（1）**均方连续**

设$T=(-\infty, \infty)$，$\{x_t, t\in T\}$为定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的复值随机过程，即

$$x_t=\xi_t+i\eta_t,\quad t\in T,$$

其中$\{\xi_t\}$与$\{\eta_t\}$为实值随机过程。

定义2 称$\{x_t, t\in T\}$为**二阶矩过程**，如每一$x_t\in\mathscr{H}$。称二阶矩过程$\{x_t\}$在τ点**均方连续**，如$x_t\xrightarrow{L_2}x_\tau\ (t\to\tau)$。如$\{x_t\}$在每一点$\tau\in T$均方连续，就称它为**在$T$上均方连续**。

定理1 （**均方连续准则**）。二阶矩过程$\{x_t\}$在$t=\tau$点均方连续当且仅当其相关函数$B(s, t)=Ex_s\bar{x}_t$在(τ, τ)点连续。

证明 设$B(s, t)$在(τ, τ)点连续，则

$$E|x_{\tau+h}-x_\tau|^2=B(\tau+h,\tau+h)-B(\tau+h,\tau)$$
$$-B(\tau,\tau+h)+B(\tau,\tau)\to 0\quad (h\to 0).$$

反之，如$\{x_t\}$在τ点均方连续，则由

$$x_{\tau+h}\xrightarrow{L_2}x_\tau,\quad x_{\tau+h'}\xrightarrow{L_2}x_\tau\ (h,h'\to 0)$$

及引理2知，当h，$h'\to 0$时

$$B(\tau+h,\tau+h')=Ex_{\tau+h}\bar{x}_{\tau+h'}\to Ex_\tau\bar{x}_\tau=B(\tau,\tau),$$

即$B(s,t)$在(τ,τ)点连续。

系 如$B(s,t)$在一切(τ,τ)点上连续，则$B(s,t)$在一切(s,t)点连续。

证明 由定理1 $\{x_t\}$在T上均方连续。故对任意$s,t\in T$，$x_u\xrightarrow{L_2}x_s(u\to s)$，$x_v\xrightarrow{L_2}x_t(v\to t)$。于是由引理2，当$u\to s$，$v\to t$时。

$$B(u,v)=Ex_u\bar{x}_v\to Ex_s\bar{x}_t=B(s,t).$$

例 参数为λ的初始为0的Poisson过程$\{x_t, t\geqslant 0\}$是均方连续的。实际上，$Ex_t^2=\lambda t+t^2\lambda^2<\infty$，$Ex_sx_t=\lambda(s\wedge t)+\lambda^2(s\wedge t)^2$，故$B(s,t)$在任一点$(\tau,\tau)$上连续。

此例指出均方连续不导致过程的样本函数连续。

（Ⅱ）均方导数

定义3 称二阶矩过程$\{x_t\}$在$t=\tau$点**均方可导**，如存在二阶矩随机变量x'_τ，使

$$\lim_{h\to 0} E\left|\frac{x_{\tau+h}-x_\tau}{h}-x'_\tau\right|^2=0.$$

如$\{x_t\}$在每一点$\tau\in T$均方可导，就称它**在T上均方可导**。以后记$\{x_t\}$在t点的导数为x'_t或$\frac{dx(t)}{dt}$。

为叙述均方可导的准则，定义广义二阶导数如下：称相关函数$B(s,t)$在(s,t)点**广义二次可导**，如下面的极限存在（有限）

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{B(s+h,t+h')-B(s+h,t)-B(s,t+h')+B(s,t)}{hh'}.$$

定理2 （均方可导准则）．二阶矩过程$\{x_t\}$在$t=\tau$点均方可导当且仅当$B(s,t)$在(τ,τ)点广义二次可导。

证明 设$B(s,t)$在(τ,τ)点广义二次可导，则

$$E\left[\left(\frac{x_{\tau+h}-x_\tau}{h}\right)\overline{\left(\frac{x_{\tau+h'}-x_\tau}{h'}\right)}\right]$$

$$=\frac{B(\tau+h,\tau+h')-B(\tau,\tau+h')-B(\tau+h,\tau)+B(\tau,\tau)}{hh'}. \tag{9}$$

当h，$h'\to 0$时，由假设，上式右方的极限存在。

今设$\{x_t\}$在$t=\tau$点均方可导，则

$$\frac{x_{\tau+h}-x_\tau}{h}\xrightarrow{L_2}x'_\tau, \qquad \frac{x_{\tau+h'}-x_\tau}{h'}\xrightarrow{L_2}x'_\tau.$$

由引理2知（9）的左方当h，$h'\to 0$时趋于$E|x'_\tau|^2<\infty$，可见$B(s,t)$在(τ,τ)点广义二次可导。

易见，如$\{x_t\}$在τ点均方可导，则$\{x_t\}$在τ点均方连续，反之未必真（习题6，7）。

（Ⅱ）均方积分

设$\{x_t,\ t\in T\}$为二阶矩过程，$Ex_t=0$，$B(s,t)=Ex_s\overline{x_t}$。又设$f(t)$，$t\in T$为一普通的复（或实）值函数。下面我们定义两种随机积分：

$$\int_a^b f(t)x(t)dt \text{ 与} \int_a^b f(t)dx(t).$$

（A）二阶矩过程的均方积分

今设$T=[a,b]$并令

$$\Delta:\quad a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

表示$[a,b]$的一个分割，$|\Delta|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$。对此分割，记

$$I(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)x(u_k)(t_k-t_{k-1}),$$

其中u_k为$[t_{k-1},t_k]$中的任一点。

定义4 当$|\Delta|\to 0$时，如果$I(\Delta)$均方收敛于某一随机变量I，且此极限与u_k的取法无关，就称$f(t)x(t)$在$[a,b]$

上均方可积. 并记

$$I=\int_a^b f(t)x(t)dt, \tag{10}$$

我们称 I 为 $f(t)x(t)$ 在$[a,b]$上的**均方积分**。

如果 $b\to\infty$时，存在随机变量 $\hat{I}$，使

$$\int_a^b f(t)x(t)dt\xrightarrow{L_2}\hat{I},$$

就定义

$$\hat{I}=\int_a^\infty f(t)x(t)dt. \tag{11}$$

定理 3 （均方可积准则） 设 $f(t)$ 是$[a,b]$上的连续函数，$x(t)$ 在$[a,b]$上均方连续，则 $f(t)x(t)$ 在$[a,b]$上均方可积，且

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}B(s,t)dsdt$$

存在。

证明 由定理 1 及系知 $B(s,t)$，$s,t\in[a,b]$是连续函数。从而 $f(s)\overline{f(t)}B(s,t)$，$s,t\in[a,b]$是连续函数。因而

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}B(s,t)dsdt$$

存在。

令

$$\Delta:\quad a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b \text{ 及}$$
$$\Delta':\quad a=s_0<s_1<\cdots<s_n=b$$

为区间$[a,b]$上的任意两个分割，则

$$E\{I(\Delta)\overline{I(\Delta')}\}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}f(u_k)\overline{f(v_j)}B(u_k,v_j)$$

$(s_{k+1}-s_k)(t_{j+1}-t_j)$.

其中 u_k 是$[s_k,s_{k+1})$中任一点，v_j 是$[t_j,t_{j+1})$中任一点。由引理 3

知，$f(t)x(t)$ 在$[a,b]$上均方可积，当且仅当

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\|\Delta'|\to 0}} E\{I(\Delta)\overline{I(\Delta')}\}$$

存在。由$f(s)\bar{f}(t)B(s,t)$，$s,t\in[a,b]$的连续性知，上述极限是

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\bar{f}(t)B(s,t)dsdt. \tag{12}$$

由（12）的存在得到$f(t)x(t)$在区间$[a,b]$上是均方可积的。

由引理 2 及（12）可得

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}B(s,t)dsdt$$

$$=\left\|\int_a^b f(t)x(t)dt\right\|^2. \tag{13}$$

定理 4 设$f(t)$，$g(t)$在$[a,b]$上连续，$x(t)$在$[a,b]$上均方连续，则

（i）若$Ex(t)=0$，对一切$t\in[a,b]$成立，那么有

$$E\int_a^b f(t)x(t)dt=\int_a^b f(t)Ex(t)dt=0;$$

（ii）$E\left\{\int_a^b f(s)x(s)ds\cdot\overline{\int_a^b g(t)x(t)dt}\right\}$

$$=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g(t)}B(s,t)dsdt.$$

证明 （i）因

$$I(\Delta)\xrightarrow{L_2} I=\int_a^b f(t)x(t)dt,$$

故由引理 2 知，当$|\Delta|\to 0$时，我们有

$$E\{I(\Delta)\}=\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)Ex(t_k)(t_{k+1}-t_k)\to E(I).$$

可见（i）的第一个等号成立。其次因$Ex_t=0$，故得第二个等式。

(ii) 令

$$J(\Delta') \xrightarrow{L_2} J = \int_a^b g(t)x(t)dt \quad (|\Delta'| \to 0),$$

于是当$|\Delta| \to 0$，$|\Delta'| \to 0$时，由引理2知

$$E\{I(\Delta)\overline{J(\Delta')}\} \longrightarrow E(I\bar{J}),$$

但如同（12）式一样，当$|\Delta| \longrightarrow 0$，$|\Delta'| \longrightarrow 0$时

$$E\{I(\Delta)\overline{J(\Delta')}\} \longrightarrow \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{g(t)} B(s, t)dsdt,$$

故（ii）得证。

关于均方积分的其它性质见习题。

（B）函数关于正交增量过程的均方积分

上面定义了$f(t)x(t)$的均方积分$\int_a^b f(t)x(t)dt$.

下面我们定义$f(t)$关于$\{x_t\}$的均方积分$\int_a^b f(t)dx(t)$.

定义5 称二阶矩过程$\{x_t, \ t \in T\}$为**正交增量过程**，如对任意$t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$，$t_i \in T$，有

$$E(x_{t_2} - x_{t_1})(\overline{x_{t_4} - x_{t_3}}) = 0. \tag{14}$$

以下我们假定$T = (-\infty, \infty)$、$\{x_t, \ t \in T\}$为正交增量过程且$\{x_t\}$左均方连续，亦即

$$\lim_{s \uparrow t} E|x_s - x_t|^2 = 0.$$

我们注意，对每一正交增量过程$\{x_t, \ t \in T\}$，存在一个（如不计常数之差是唯一的（习题20））单调不减的实值函数$F(t)$，$t \in T$，使得对任意$s \leqslant t$有

$$E|x_t - x_s|^2 = F(t) - F(s). \tag{15}$$

实际上，任意固定$t_0 \in T$，定义

$$F(t) = \begin{cases} E|x_t - x_{t_0}|^2, & \text{如 } t \geqslant t_0, \\ -E|x_t - x_{t_0}|^2, & \text{如 } t < t_0. \end{cases}$$

则当$t_0 \leqslant s \leqslant t$时，由（14）

$$
\begin{aligned}
F(t)-F(s) &= E|x_t - x_{t_0}|^2 - E|x_s - x_{t_0}|^2 \\
&= E|(x_t - x_s)+(x_s - x_{t_0})|^2 - E|x_s - x_{t_0}|^2 \\
&= E|x_t - x_s|^2.
\end{aligned}
$$

当$s \leqslant t \leqslant t_0$或$s \leqslant t_0 \leqslant t$时，用相同的方法可证（15）也成立。

由（15）可见$\{x_t\}$左均方连续与$F(t)$左连续是等价的。

记关于$F(t)$平方可积的全体Borel可测函数为$L_2(dF)$。即

$$L_2(dF)=\{f(t): \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dF(t)<\infty\}.$$

下面我们对$f \in L_2(dF)$定义随机积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t)$。

先设$f(t)$为阶梯函数的情形，亦即存在常数c及$[-c, c]$的一分割$-c \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n = c$，使

$$
f(t)=\begin{cases}
0, & t < t_0 \\
a_i, & t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\
0, & t \geqslant t_n.
\end{cases}
$$

其中a_i可以是复数。对上述阶梯函数$f(t)$，定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{t_{i+1}}-x_{t_i}). \tag{16}$$

如上定义的积分值与$f(t)$的表达式无关。实际上，如$f(t)$另有表达式

$$
f(t)=\begin{cases}
0, & t < t'_0, \\
b_i, & t'_i \leqslant t < t'_{i+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\
0, & t \geqslant t'_m.
\end{cases}
$$

将分点$\{t_i\}$与$\{t'_i\}$合并后重新按大小排列，记为

$$s_0 < s_1 < \cdots < s_N$$

令　$A_i = \{k: [s_k, s_{k+1}) \subset [t_i, t_{i+1})\}$，易见

$$x_{t_{i+1}}-x_{t_i}=\sum_{k\in A_i}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k}).$$

记 $f(t)=r_k$ $(s_k\leqslant t<s_{k+1})$，$f(t)=0$ $(t\geqslant s_N$ 或 $t<s_0)$，则我们有

$$\sum_{k=0}^{N} r_k(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k\in A_i} r_k(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_i\sum_{k\in A_i}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{t_{i+1}}-x_{t_i}).$$

同理可证

$$\sum_{k=0}^{N} r_k(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})=\sum_{i=0}^{m-1} b_i(x_{t'_{i+1}}-x_{t'_i}).$$

由（16）定义的积分具有下列简单性质。

引理 4　设f，g都是阶梯函数，α，β为常数，则

（i）$\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dx(t)$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dx(t)+\beta\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dx(t),$$

（ii）$E\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dx(t)\cdot\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dx(t)}\right]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}dF(t).$$

证明　（i）设

$$f(t)=\sum_{i=0}^{M_1-1}a_iI_{[t_i,t_{i+1})},$$

$$g(t)=\sum_{i=0}^{M_2-1}b_iI_{[s_i,s_{i+1})}.$$

将$\{t_i\}$与$\{s_i\}$合并后，重新把它们按大小排列，记为$u_0<u_1<\cdots<u_N$。设

$$f(t)=\sum_{i=0}^{N-1} a_i' I_{[u_i,u_{i+1})},$$

$$g(t)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i' I_{[u_i,u_{i+1})},$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dx(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}(\alpha a_i'+\beta b_i')(x_{u_{i+1}}-x_{u_i})$$

$$=\alpha\sum_{i=0}^{N-1} a_i'(x_{u_{i+1}}-x_{u_i})+\beta\sum_{i=0}^{N-1} b_i'(x_{u_{i+1}}-x_{u_i})$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t)-\beta\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dx(t)$$

(ii) $$E\left[\sum_{i=0}^{N-1} a_i'(x_{u_{i+1}}-x_{u_i})\right]\overline{\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i'(x_{u_{i+1}}-x_{u_i})\right]}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1} a_i'\overline{b_i'}E|x_{u_{i+1}}-x_{u_i}|^2$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1} f(u_i)\overline{g(u_i)}[F(u_{i+1})-F(u_i)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dF(t).$$

现设$f\in L_2(dF)$，于是存在一列阶梯函数$f_n(t)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)-f(t)|^2dF(t)=0. \tag{16}$$

如令

$$J_n=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)dx(t),$$

那么，由引理 4 我们有

$$E|J_n-J_m|^2=E|\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(t)-f_m(t)]dx(t)|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)-f_m(t)|^2dF(t). \qquad (17)$$

由（16）知，当 n，$m\longrightarrow\infty$时（17）的右方趋于 0．因而由引理 3 知存在唯一的二阶矩随机变量 J，使

$$E|J_n-J|^2\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty).$$

记此均方极限

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dx(t), \qquad (18)$$

并称 J 为 $f(t)$ 关于$\{x_t\}$的均方积分。

对任意$-\infty<a<b<\infty$，定义

$$\int_a^b f(t)dx(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)I_{[a,b)}dx(t). \qquad (19)$$

注意，为使（18）定义的积分有意义，必须指出 J 与$\{f_n\}$的选择无关．为此，设另有阶梯函数列$g_n(t)$，使

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(t)-f(t)|^2dF(t)\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty),$$

那么，只需把$\{f_n\}$与$\{g_n\}$排成

$$f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2,\ \cdots,$$

此函数列也满足（16）．于是如同（17）那样得到随机变量 J，显然这个 J 与改用子列$\{f_n\}$或$\{g_n\}$所得到的 J 是一样的（指几乎处处相等）。

利用引理 1 及引理 4 可得积分（18）的如下简单性质，其证明留作习题（习题21）。

定理 5 对 f，$g\in L_2(dF)$，有

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dx(t)$,

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t) + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dx(t),$$

其中α，β为常数；

(ii) $$E\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dx(t)}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dF(t),$$

特别，我们有

$$E\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx(t)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dF(t).$$

习　题

以下各题中的随机变量均指二阶矩变量。

1．设$x_n \xrightarrow{L_2} x$，$y_n \xrightarrow{L_2} y$，证明$ax_n + by_n \xrightarrow{L_2} ax + by$，其中$a$，$b$为常数。

2．设$\sum_{n=1}^{\infty} E|x_n - x|^2 < \infty$，证明$x_n \to x$ a．e．。

3．由均方收敛性质知，如$x_n \xrightarrow{L_2} x$，则对一切$y \in \mathscr{H}$，$Ex_n\bar{y} \to Ex\bar{y}$ $(n \to \infty)$，试问其逆是否正确？

4．由均方收敛性质知，如$x_n \xrightarrow{L_2} x$，则$E|x_n|^2 \to E|x|^2$。如将条件$x_n \xrightarrow{L_2} x$改为对一切$y \in \mathscr{H}$有$Ex_n\bar{y} \longrightarrow Ex\bar{y}$ $(n \to \infty)$，试问上述结论是否仍成立？

5．设x_n为实值正态随机变量，$x_n \xrightarrow{L_2} x$，证明x也是正态变量。

6．证明如$\{x_t, t \in [a, b]\}$均方可导，则$\{x_t\}$均方连续。

7．试证Wiener过程均方连续，但非均方可导。

8．设$\{x_t, t \in [a, b]\}$与$\{y_t, t \in [a, b]\}$均方可导，α，β为常数，$g(t)$为$[a, b]$上的普通可导函数。证明

(i) $(\alpha x(t) + \beta y(t))' = \alpha x'(t) + \beta y'(t)$；

(ii) $\frac{d}{dt}[g(t)x(t)] = x(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{dx(t)}{dt}$。

9. 证明如实值正态过程$\{x_t, t\geqslant 0\}$均方可导，则其导数$\{x_t', t\geqslant 0\}$也是正态过程.

10. 设二阶矩过程$\{x_t, t\in[a, b]\}$的相关函数$B(s, t)=Ex_s\bar{x}_t$在$[a, b]\times[a, b]$上连续，$f(t)$为$[a, b]$上的连续函数. 证明

$$E\left[x_s\overline{\int_a^b f(t)x(t)dt}\right]=\int_a^b B(s, t)\overline{f(t)}dt.$$

11. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$均方连续，证明在均方收敛意义下

$$\frac{d}{dt}\int_a^t x_s ds = x_t, \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

12. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$均方可导且$x_t'=0$，$t\in[a, b]$. 证明对任意$s, t\in[a, b]$有$x_t=x_s$ a. e..

13. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$均方可导且其导数$\{x_t'\}$均方连续，证明对任意$t\in[a, b]$，

$$\int_a^t x'(s)ds = x(t)-x(a) \quad \text{a. e.}.$$

14. 试举出均方可导但其样本函数不是处处可导的二阶矩过程的例子.

提示 考虑$y_t=\int_0^t x_s ds$，其中$\{x_s, s\geqslant 0\}$为Poisson过程(初值为0)

15. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$与$\{y_t, t\in[a, b]\}$均方连续. α, β为常数，证明

(i) $\int_a^b [\alpha x(t)+\beta y(t)]dt=\alpha\int_a^b x(t)dt+\beta\int_a^b y(t)dt$;

(ii) $\int_a^b x(t)dt=\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt, \quad a\leqslant c\leqslant b$.

16. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$均方连续，证明对一切$t\in[a, b]$，有

$$\left\|\int_a^t x(s)ds\right\|^2\leqslant(t-a)\int_a^t\|x_s\|^2 ds.$$

17. 设$\{x_t, t\in[a, b]\}$均方连续，证明

(i) $\int_a^b\|x_s\|ds$存在;

(ii) $\left\|\int_a^b x(s)ds\right\|\leqslant\int_a^b\|x_s\|ds$.

18. 设已给一列随机过程$\{x_n(t), t\in[a, b]\}$, $n=1, 2, \cdots$. 试证如

$x_n(t)\xrightarrow{L_2}x(t)$对$t$一致成立，则

$$\int_a^b x_n(t)\,dt\xrightarrow{L_2}\int_a^b x(t)\,dt.$$

19. 证明如$\{x_t, t\in[a, b]\}$为均方连续的正态过程，则$\int_a^b x_t dt$为正态随机变量。

20. 设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为正交增量过程。证明满足

$$E|x_t-x_s|^2=F(t)-F(s),\quad t\geqslant s$$

的单调不减函数$F(t)$是唯一的（不计常数之差）。

21. 证明定理5。

22. 设$\{x_t\}$及$F(t)$与第20题相同。试证如f_n, $f\in L_2(dF)$且$\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)-f(t)|^2dF(t)\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)\,dx(t)\xrightarrow{L_2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dx(t).$$

§7.2 平稳过程的定义及其简单性质

（一）定义及例子

设已给概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及定义在其上的复值随机过程$\{x_t, t\in T\}$，即

$$x_t=\xi_t+i\eta_t,\quad t\in T,$$

其中$\{\xi_t, t\in T\}$，$\{\eta_t, t\in T\}$为实值随机过程。如果$\eta_t\equiv 0$，$t\in T$，$\{x_t\}$就化为实值过程。一般取$T=(-\infty, \infty)$或$[a, b]$，或$\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$。为确定起见，如不特别声明，除了§7.5和§7.6外，本节及以后均设$\{x_t, t\in T\}$取复值，$T=(-\infty, \infty)$。

定义1 称$\{x_t, t\in T\}$为**强平稳过程**，如对任意正整数n及$t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$和$s\in T$，随机向量

$$(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$$

与

$$(x_{t_1+s}, x_{t_2+s}, \cdots, x_{t_n+s})$$

有相同的分布函数，亦即对任意实数a_i，b_i，$1\leqslant i\leqslant n$，

$$P(\xi_{t_i}\leqslant a_i,\ \eta_{t_i}\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)$$
$$=P(\xi_{t_i+s}\leqslant a_i,\ \eta_{t_i+s}\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n). \qquad (1)$$

注意，在上述定义中，没有要求Ex_t或$E|x_t|^2$一定存在。但如对某一t，$E|x_t|^2<\infty$，则由（1）对一切$t\in T$有$E|x_t|^2<\infty$。

由（1）$\{x_t\}$的均值函数

$$m(t)=Ex_t$$
$$=Ex_{t+s}=m(t+s). \qquad (2)$$

可见$m(t)$为常数，记$m(t)=m$。

由（1），$\{x_t\}$的协方差函数为

$$E(x_s-m)\overline{(x_{s+t}-m)}=Ex_s\bar{x}_{s+t}-|m|^2$$
$$=E(\xi_s\xi_{s+t}+\eta_s\eta_{s+t})-iE(\xi_s\eta_{s+t}-\eta_s\xi_{s+t})-|m|^2$$
$$=E(\xi_0\xi_t+\eta_0\eta_t)-iE(\xi_0\eta_t-\eta_0\xi_t)-|m|^2$$
$$=Ex_0\bar{x}_t-|m|^2. \qquad (3)$$

可见$E(x_s-m)\overline{(x_{s+t}-m)}$（或等价地$Ex_s\bar{x}_{s+t}$）与$s$无关。

在第一章中我们已指出，要确定有关过程的全部有限维分布函数并对它们进行分析，往往很困难和烦杂。由于随机过程的前一、二阶矩能反映过程的许多重要性质，因此，在实际中有许多问题只需知道并运用过程的前一、二阶矩就能得到较满意的解决。加上对这两个统计特征的确定和运算都比较容易，于是就产生弱平稳过程的概念及其相应的理论。

定义 2 称$\{x_t,\ t\in T\}$为**弱平稳过程**，如它满足

（a）对一切$t\in T$，$E|x_t|^2<\infty$；

（b）对一切$t\in T$，$Ex_t=m$常数；

（c）对任意t，$t+\tau\in T$，**相关函数**

$$B(\tau)=Ex_{t+\tau}\bar{x}_t$$

与t无关。

弱平稳过程也称**广义平稳过程**或**二阶矩平稳过程**。

由（a）知$\{x_t\}$是二阶矩过程，故$B(\tau)$有定义。其次由（3）式已知，在条件（b）下，条件（c）与下面的条件等价：

（c'）对任意t，$t+\tau\in T$，**协方差函数**

$$K(\tau)=E(x_{t+\tau}-m)\overline{(x_t-m)}$$

与t无关。

前面已指出，强平稳过程未必是弱平稳过程（因$E|x_t|^2$未必存在）。但如对某一t有$E|x_t|^2<\infty$，则它是弱平稳过程。反之，弱平稳过程一般不是强平稳过程，这是因为过程的前二阶矩不足以确定过程的有限维分布函数。然而有一重要情况例外，即当$\{x_t\}$为正态过程时，强平稳与弱平稳是等价的。这是因为正态过程是二阶矩过程，且其有限维分布函数完全可由其均值及其协方差函数确定。

本章着重讨论弱平稳过程，所以如不引起混淆，往后我们就简称弱平稳过程为**平稳过程**。

下面举一些平稳过程的例子

例1　白噪声过程。设$\{x_n,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$为互不相关的实值随机序列，$Ex_n=0$，$E|x_n|^2=\sigma^2>0$。则$\{x_n\}$为平稳过程。这是因为

$$Ex_{n+\tau}x_n=\begin{cases}\sigma^2, & \tau=0,\\ 0, & \tau\neq0\end{cases}$$

与n无关。

在工程技术中常把$\{x_n\}$作为诸如电流、电压等的随机波动模型，并称它为白噪声过程。

例2　滑动平均过程。设$\{x_n,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots\}$为互不相关的实值随机序列，$Ex_n=0$，方差$Dx_n=\sigma^2>0$。定义

$$y_n=\sum_{k=0}^{M}a_kx_{n-k},\quad n=0,\ \pm1,\ \cdots,$$

其中$\{a_k\}$为实数列，M为一正整数。则$\{y_n\}$为平稳过程。

实际上

$$Ey_n=\sum_{k=0}^{M}a_kEx_{n-k}=0,$$

$$Ey_{n+\tau}y_n=E\left[\left(\sum_{k=0}^{M}a_kx_{n+\tau-k}\right)\left(\sum_{j=0}^{M}a_jx_{n-j}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\sigma^2(a_0a_\tau+a_1a_{\tau+1}+\cdots+a_{M-\tau}a_M, & \text{如 } \tau\leqslant M,\\ 0, & \text{如 } \tau>M.\end{cases}$$

与 n 无关（$M=\infty$的情形见习题 3）。

当 $\sum_{k=0}^{M}a_k=1$ 时，就称y_n 为以$\{a_0, \cdots, a_M\}$ 为权、步长为$M+1$ 的**滑动平均**。在时间序列分析中常用滑动平均使数据平滑化。

例 3　三角多项式过程．设$\{A_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$及$\{B_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$为实值随机序列，满足

$$EA_n=EB_n=0,\quad E(A_nB_m)=0$$

及

$$E(A_nA_m)=E(B_nB_m)=\sigma_n^2\delta_{nm}.$$

令$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$为正实数，定义

$$x_t=\sum_{k=1}^{N}(A_k\cos\omega_kt+B_k\sin\omega_kt),\quad -\infty<t<\infty,$$

则$\{x_t\}$为平稳过程。

实际上，由假设$Ex_t=0$．其次

$$Ex_{t+\tau}x_t=\sum_{k=1}^{N}E[A_k^2\cos(t+\tau)\omega_k\cdot\cos\omega_kt$$
$$+B_k^2\sin(t+\tau)\omega_k\cdot\sin\omega_kt]$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos\omega_k\tau \tag{4}$$

与 t 无关。

$A_k\cos\omega_k t$及$B_k\sin\omega_k t$表示固频率为ω_k而振幅A_k及B_k为随机的简谐振动在时刻 t 的质点的位置。此例指出，当振动的随机振幅互不相关时，经迭加而成的过程为一平稳过程。随机简谐振动的复数形式为

$$z_k e^{i\omega_k t}.$$

如果$\{z_k\}$互不相关且$Ez_k=0$，$Ez_k\bar{z}_k=\sigma_k^2$，则

$$x_t=\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\omega_k t}$$

也是平稳过程（习题 4），且

$$Ex_{t+\tau}\bar{x}_t=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{i\omega_k\tau},$$

其实部与（4）相同。

（二）平稳过程的简单性质

平稳过程$\{x_t,\ t\in T\}$具有下列简单性质：

性质1 （i）$B(0)\geqslant 0$；

（ii）$B(-\tau)=\overline{B(\tau)}$；

（iii）$|B(\tau)|\leqslant B(0)$；

（iv）非负定性：即对任意正整数 n 及复数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\in T$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n} B(t_j-t_k)a_j\bar{a}_k\geqslant 0. \tag{6}$$

证明 $B(0)=E|x_t|^2\geqslant 0$.

$$B(-\tau)=Ex_t\bar{x}_{t+\tau}=\overline{Ex_{t+\tau}\bar{x}_t}=\overline{B(\tau)}.$$

$$|B(\tau)|^2=|Ex_{t+\tau}\bar{x}_t|^2$$
$$\leqslant E|x_{t+\tau}|^2\cdot E|x_t|^2=[B(0)]^2.$$

$B(\tau)$的非负定性见§1.1定理 2。

性质 2 下列诸条件等价：

(i) $\{x_t\}$ 在 T 上均方连续；

(ii) $\{x_t\}$ 在 $t=0$ 点均方连续；

(iii) $B(\tau)$ 在 $\tau=0$ 点连续；

(iv) $B(\tau)$ 在 T 上连续。

证明 (i)⇒(ii) 很显然。(ii)⇒(iii) 由§7.1定理1可得。(iii)⇒(iv) 是由于

$$
\begin{aligned}
|B(t+\tau)-B(t)| &= |E(x_{t+\tau}-x_t)\bar{x}_0| \\
&\leqslant [E|x_{t+\tau}-x_t|^2 \cdot E|x_0|^2]^{1/2} \\
&= [\{2B(0)-B(\tau)-\overline{B(\tau)}\}B(0)]^{1/2} \to 0 \\
&\qquad (\tau \to 0).
\end{aligned}
$$

最后由§7.1定理1可得 (iv)⇒(i)。

性质 3 下列诸条件中 (i) 与 (ii), (iv) 可推出 (iii) (i) 可推出 (iv)：

(i) $\{x_t\}$ 均方可导；

(ii) $\{x_t\}$ 在 $t=0$ 点均方可导；

(iii) $B(\tau)$ 在 $\tau=0$ 点二次可导；

(iv) $B(\tau)$ 二次可导。

证明 (i)⇔(ii) 是显然的。(iv) ⇒ (iii) 也显然。下证 (i)⇒(iv)。由

$$\frac{x_h-x_0}{h} \xrightarrow{L_2} x_0'$$

及§7.1引理2知

$$\frac{B(\tau-h)-B(\tau)}{h} \longrightarrow Ex_\tau\bar{x}_0' \qquad (h\to 0),$$

可见对一切 τ，导数 $B'(\tau)$ 存在且

$$B'(\tau) = -Ex_\tau\bar{x}_0'. \tag{7}$$

其次，由

$$\frac{x_{\tau+h'}-x_\tau}{h'} \xrightarrow{L_2} x_\tau'$$

及同上理由并注意（7），我们得

$$\frac{-B'(\tau+h')+B'(\tau)}{h'}\longrightarrow Ex'_\tau\bar{x}'_0 \quad (h'\to 0).$$

可见对一切 τ，$B''(\tau)$ 存在且

$$B''(\tau)=-Ex'_\tau\bar{x}'_0. \tag{8}$$

由 §7.1定理 3 及定理 4 可得如下结论。

性质 4 设平稳过程 $\{x_t,\ t\in[a,b]\}$ 均方连续，$f(t)$，$g(t)$ 为 $[a,b]$ 上的复值连续函数，则

(i) $\int_a^b f(t)x(t)dt$ 存在；

(ii) $E\left[\int_a^b f(s)x(s)ds\cdot\overline{\int_a^b g(t)x(t)dt}\right]$

$$=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g(t)}B(s-t)dsdt;$$

(iii) $E\int_a^b f(t)x(t)dt=\int_a^b f(t)Ex_tdt$

$$=m\int_a^b f(t)dt.$$

其中 $m=Ex_t$。

习　题

1．试举弱平稳但非强平稳的过程。

提示 考虑 $x_n=\sin A_n$，$n=1,2,\cdots$。其中 A_n 为 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布随机变量。

2．试举非强平稳也非弱平稳的二阶矩过程。

3．设 $\{x_n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为互不相关的实值过程，$Ex_n=0$，$Dx_n=\sigma^2$。证明如实数列 $\{c_i\}$ 满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^2<\infty$，则对每一 n，级数

$$y_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kx_{n-k}$$

均方收敛且$\{y_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$为平稳过程。

4. 设$\{z_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$为互不相关的实值过程，$Ez_n=0$，$Dz_n=\sigma_n^2$且$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2<\infty$。证明对每一$t$，级数

$$x_t=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{i\omega_n t}$$

均方收敛且$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为平稳过程，其中$\{\omega_n\}$为一实数列。

5. 设$\{x_t, t\geqslant 0\}$是以λ为参数的Poisson过程。令

$$y_t=x_{t+1}-x_t, t\geqslant 0$$

证明$\{y_t, t\geqslant 0\}$为平稳过程。

6. 设X, Y为实随机变量，$\lambda\neq 0$是常数。证明

$$\xi_t=X\cos\lambda t+Y\sin\lambda t, -\infty<t<\infty$$

是平稳过程的充要条件为X与Y不相关，且其均值为零，方差相等。

7. 试举非均方连续的平稳过程。

8. 设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为平稳过程，证明$\{x_t\}$均方可导当且仅当$\{x_t\}$在某一点均方可导。

9. 设$f(t)(-\infty<t<\infty)$为普通复值函数，Y为随机变量且$EY=0$，$E|Y|^2=\sigma^2$，定义

$$x_t=Yf(t) \qquad (-\infty<t<\infty),$$

证明$\{x_t\}$是平稳过程当且仅当$f(t)=ce^{i(\lambda t+\theta)}$，其中$c$，$\lambda$，$\theta$为常数。

10. 设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为平稳过程，$Ex_t=0$且$Ex_t\bar{x}_s=e^{-a|t-s|}$，$a$常数。证明

$$\xi_t=\frac{1}{b}\int_t^{t+b} x_s ds \qquad (b>0)$$

为平稳过程。

11. 设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为正交增量过程，$Ex_t=0$且$E|x_t-x_s|^2=t-s(t\geqslant s)$。试证对任意满足下列条件的复值函数$g(t)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt<\infty,$$

随机过程

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)dx_s, \quad -\infty<t<\infty$$

为平稳的。

12．设 $f(\lambda)\geqslant 0\ (-\infty<\lambda<\infty)$ 为勒贝格可积的实值函数。令

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(\lambda)d\lambda \qquad (-\infty<t<\infty).$$

证明

（i）存在平稳过程 $\{x_t\}$ 以 $B(t)$ 为其相关函数；

（ii）$\{x_t\}$ 可取为实值过程的充要条件为 $f(t)$ 是偶函数。

13．假设与习题11相同。证明

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{t}e^{-a(t-s)}dx_s \qquad (-\infty<t<\infty)$$

为平稳过程，其中 $a>0$。

14．假设 $X=\{x_t, t\in T\}$ 是实值随机过程。定义过程 $X_s=\{x_{t+s}, t\in T\}$。为使 X 是强平稳过程，必须且只需下列诸条件之一满足：

（i）对任意 $s\geqslant 0$，$X(\omega)$ 与 $X_s(\omega)$ 有相同的分布；

（ii）对任意 n 元实值有界Borel可测函数 $f(y_1,\cdots,y_n)$，有

$$Ef(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=Ef(x_{t_1+s},\cdots,x_{t_n+s});$$

（iii）对任意定义于 R_1^T 上的实值有界 $\mathscr{B}_1^T$ 可测函数 $\phi(e(\cdot))$，有

$$E\{\phi(X)\}=E\{\phi(X_s)\}.$$

15．设 $X=\{x_t, t\in T\}$ 是强平稳过程，$\phi(e(\cdot))$ 是定义于 R_1^T 上的实值 $\mathscr{B}_1^T$ 可测函数，令

$$y_s=\phi(X_s).$$

求证　$Y=\{y_s,\ s\in T\}$ 也是强平稳过程，其中 $X_s=\{x_{t+s},\ t\in T\}$。

§7.3　平稳过程及其相关函数的谱分解

回忆§7.2由 n 个随机简谐振动迭加而成的平稳过程

$$x_t=\sum_{k=1}^{n}z_k e^{i\lambda_k t}, \tag{1}$$

其中 $\{z_k\}$ 互不相关且 $Ez_k=0$。令 $\sigma_k^2=E|z_k|^2$，则

$$B(\tau)=Ex_{t+\tau}\bar{x}_t=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 e^{i\lambda_k\tau}$$

$$=\sigma^2\sum_{k=1}^{n} p_k e^{i\lambda_k\tau},\tag{2}$$

其中$\sigma^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，$p_k=\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$。易见$\{p_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$为一概率分布。如令$q_k=\frac{1}{2}p_k$，$q_{-k}=q_k$，$\lambda_{-k}=\lambda_k$，则可将（2）改写成如下的对称形式

$$B(\tau)=\sigma^2\sum_{k=-n}^{n} q_k e^{i\tau\lambda_k},\tag{3}$$

其中$q_0=\lambda_0=0$。因为$\{q_k,\ -n\leqslant k\leqslant n\}$是概率分布，（3）启示我们在某种收敛意义下可把$B(\tau)$表示成

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}dF(\lambda)$$

的形式，其中$F(\lambda)$为一分布函数。类似地（1）启示我们可把x_t也表成

$$x_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dy(\lambda),$$

其中$\{y(\lambda)\}$为具有某种性质的随机过程。此表达式类似于数学分析中把函数表示成无数多个简谐振动的迭加一样。

（一）相关函数的谱分解

定理1 为使复值函数$B(t)$，$t\in T$，成为均值为0，方差为1的均方连续平稳过程$\{x_t,\ t\in T\}$的相关函数，其充要条件是$B(t)$可表示成

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dF(\lambda),\tag{4}$$

其中$F(\lambda)$为左连续的分布函数，且不计常数之差$F(\lambda)$由$B(t)$唯一确定。

如果$T=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$，（4）改写为

$$B(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}dF(\lambda),\tag{5}$$

其中$F(\lambda)$为$[-\pi, \pi]$上的左连续分布函数。

证明 必要性：因$\{x_t\}$均方连续，方差为1，故由§7.2性质1和2知$B(t)$连续，$B(0)=1$且$B(t)$非负定。从而据Bochner-Хинчин定理，$B(t)$为一特征函数，故（4）成立。应用Herglotz定理❶代替Bochner-Хинчин定理即得（5）式。

充分性：由（4）（或（5））可知$\overline{B(t)}=B(-t)$。又因

$$\sum_{j,k=1}^{n} B(t_j-t_k)a_j\bar{a}_k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t_j-t_k)}dF(\lambda)\right]a_j\bar{a}_k$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda t_j}a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda t_k}\bar{a}_k\right)dF(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda t_k}a_k\right|^2 dF(\lambda)\geqslant 0,$$

故由§2.1存在性定理3下面的说明（令其中的$m(t)=0$，$K(s, t)=B(s-t)$）可知，存在复正态过程$\{x_t, t\in T\}$，使$Ex_t=0$，$E|x_t|^2=B(0)=1$且

$$Ex_s\bar{x}_t=B(s-t).$$

可见$\{x_t\}$为平稳过程，均值为0，方差为1。又因$|e^{i\lambda t}|=1$，故（4）中可在积分号下取极限，从而知$B(t)$连续，因此$\{x_t\}$均方连续。

特别，当$F(\lambda)$绝对连续时，亦即存在$f(t)$，使

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f(t)dt \tag{6}$$

---

❶ 参看Гнеденко著“概率论教程”§38或复旦大学编“概率论”第一册226页定理10。

时，则（4）化为

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}f(\lambda)d\lambda. \tag{7}$$

由富氏变换的逆变换得

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}B(t)dt. \tag{8}$$

称（4）（或（5））中的 $F(\lambda)$ 为平稳过程 $\{x_t\}$ 的**谱函数**。称（7）中的 $f(\lambda)$ 为 $\{x_t\}$ 的**谱密度**。

当 $B(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|B(t)|dt<\infty$$

时，由特征函数的性质知 $B(t)$ 必可表成（7）式。

读者注意，定理中条件 $Ex_t=0$ 及 $E|x_t|^2=1$ 是非本质的。如不满足，可将原过程标准化，即令

$$y_t=\frac{x_t-m}{\sigma},$$

其中 $m=Ex_t$，$\sigma^2=E|x_t-m|^2$。这时

$$\sigma^2Ey_{t+\tau}\bar{y}_t=E(x_{t+\tau}-m)\overline{(x_t-m)}=K(\tau),$$

故 $\{x_t\}$ 的协方差函数 $K(\tau)$ 可以表示成（4）（或（5））的形式，这时其中的 $F(\lambda)$ 为有界非降的左连续函数。

当 $\{x_t\}$ 为实值过程时，我们有

定理 2 实值函数 $B(t)$ 成为具有均值为 0，方差为 1 的均方连续实值平稳过程 $\{x_t\}$ 的相关函数，其充要条件是 $B(t)$ 可表成

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda t dF(\lambda). \tag{9}$$

当 $T=\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 时（9）改写为

$$B(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda n dF(\lambda). \tag{10}$$

特别，如 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点连续，则（9），（10）可改写成

$$B(t)=\int_0^{\infty}\cos\lambda t dG(\lambda), \tag{11}$$

$$B(n)=\int_0^{\pi}\cos\lambda n dG(\lambda), \tag{12}$$

其中$G(\lambda)=2F(\lambda)$为有界非降左连续函数。

证明 因为$e^{i\lambda t}=\cos\lambda t+i\sin\lambda t$，故当$B(t)$为实值时，由定理1得定理2的前半部。其次，因$B(t)$为实值，由特征函数的性质知，$F(\lambda)$为对称分布函数，即$F(\lambda)=1-F(-\lambda+0)$。所以

$$F(\lambda_2)-F(\lambda_1)=F(-\lambda_1+0)-F(-\lambda_2+0).$$

因此，如$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，因$\cos\lambda t$是偶函数，可将（9）和（10）分别改写成（11）和（12）。

特别如实平稳过程$\{x_t\}$有谱密度$f(\lambda)$，则由（8）及$B(t)=B(-t)$得

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda t\cdot B(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda t\cdot B(t)dt. \tag{13}$$

可见$f(-\lambda)=f(\lambda)$，故由（9）

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\cos\lambda t d\lambda$$

$$=2\int_0^{\infty}f(\lambda)\cos\lambda t dt, \tag{14}$$

当$T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$时

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}B(0)+\sum_{k=1}^{\infty}B(k)\cos\lambda k\right\}, \tag{15}$$

$$B(n)=2\int_0^{\pi}f(\lambda)\cos\lambda n d\lambda. \tag{16}$$

例1 设$\{x_n, n=0,\pm1,\cdots\}$为§7.2例1的白噪声过程，求$f(\lambda)$及$F(\lambda)$.

不妨设$Ex_n^2=\sigma^2=1$。由于$B(0)=1$，$B(n)=0$（$n\neq$

0)，故 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B(n)|<\infty$，从而 $\{x_n\}$ 有谱密度 $f(\lambda)$。由（15）

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi},\quad -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi,$$

谱函数可取为

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}(\lambda+\pi),\quad -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi.$$

例 2 设 $\{y_n,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots\}$ 为互不相关的实值过程，$Ey_n=0$，$E|y_n|^2=1$。考虑滑动平均过程

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}a^k y_{n-k},\quad n=0,\ \pm1,\ \cdots,$$

其中 a 为实数，$|a|<1$。则 $\{x_n\}$ 为平稳过程（§7.2 习题 3）。如同§7.2例 2 那样

$$B(n)=\sum_{k\geqslant n}a^k a^{k-n}$$

$$=\frac{a^n}{1-a^2},\quad n\geqslant0,$$

可见 $\{x_n\}$ 的相关函数为

$$B(n)=Aa^{|n|},\quad A=\frac{1}{1-a^2}>0,\quad n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots.$$

下面求 $f(\lambda)\left(注意\sum_n|B(n)|<\infty\right)$。由（8）

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}B(k)e^{-i\lambda k}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}a^{-k}e^{-i\lambda k}+\sum_{k=0}^{\infty}a^k e^{-i\lambda k}\right\}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a^k e^{i\lambda k}+\sum_{k=0}^{\infty}a^k e^{-i\lambda k}\right\}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left\{\frac{ae^{i\lambda}}{1-ae^{i\lambda}}+\frac{1}{1-ae^{-i\lambda}}\right\}$$

$$=\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1-a^2}{|1-ae^{i\lambda}|^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-2a\cos\lambda+a^2)},\quad -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi。$$

例 3 考虑平稳过程

$$x_t=A\cos\lambda t+B\sin\lambda t\quad(-\infty<t<\infty),$$

其中实数$\lambda>0$，A和B为互不相关、均值为 0 、方差为 1 的实值随机变量。如同§7.2例 3，$\{x_t\}$的相关函数为

$$B(t)=\cos\lambda t。$$

由定理 2

$$B(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos ut\,dF(u)。$$

可见$\{x_t\}$的谱函数

$$F(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant-\lambda,\\ \frac{1}{2}, & -\lambda<u\leqslant\lambda,\\ 1, & u>\lambda。\end{cases}$$

（二）平稳过程的谱分解

上面讲了$B(t)$的谱分解，下面的定理给出过程$\{x_t\}$本身的谱分解。过程的谱分解最初由Колмогоров用希氏空间的方法证明，下面是更直接的另一证法。为此先证几个引理。

本段恒设$\{x_t\}$均方连续，$Ex_t=0$，$E|x_t|^2=1$。令$F(\lambda)$为$\{x_t\}$的谱函数，$F(t)$为左连续的分布函数，其连续点全体成一稠密子集，不连续点的个数至多可列多个。

引理1 设a，b（$a<b$）为$F(\lambda)$的任意两个连续点。则如下定义的随机变量：

$$y_r(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}x_t\int_a^b e^{-it\lambda}d\lambda dt,\tag{17}$$

当$r\to\infty$时均方收敛于某一极限$y(a,b)$且$Ey(a,b)=0$。

证明 $y_r(a, b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} x_t \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-it}dt$.

由§7.1定理3系知$y_r(a, b)$存在。令$0<s\leqslant r$，则

$$E|y_r-y_s|^2=E\left|\int_{-r}^{r} x_t \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}dt-\int_{-s}^{s} x_t \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}dt\right|^2$$

$$=E\left|\int_{s<|t|<r} x_t \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}dt\right|^2$$

$$=\int_{s<|t|<r}\int_{s<|u|<r} \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}\cdot\frac{e^{ibu}-e^{iau}}{2\pi iu}\cdot Ex_t\bar{x}_u dtdu$$

$$=\int_{s<|t|<r}\int_{s<|u|<r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}\cdot\frac{e^{ibu}-e^{iau}}{2\pi iu}\cdot e^{i\lambda(t-u)}dtdudF(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{s<|t|<r} \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}\cdot e^{i\lambda t}dt\right|^2 dF(\lambda), \tag{18}$$

但对任给的$\varepsilon>0$，当$|\lambda-b|>\varepsilon$及$|\lambda-a|>\varepsilon$时，如$s, r\to\infty$，则（18）右方的被积函数均匀地趋于零。这是因为

$$\int_{s<|t|<r} \frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-2\pi it}\cdot e^{i\lambda t}dt=\int_{s<|t|<r}\int_a^b \frac{e^{-it(x-\lambda)}}{2\pi}dxdt, \tag{19}$$

而

$$\left|\int_s^r\int_a^b \cos(x-\lambda)t\,dxdt\right|$$

$$=\left|\int_s^r t^{-1}[\sin(b-\lambda)t-\sin(a-\lambda)t]dt\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\cos(b-\lambda)t}{(b-\lambda)t}\right|_s^r\left|+\left|\int_s^r\frac{\cos(b-\lambda)t}{(b-\lambda)t^2}dt\right|\right.$$

$$+\left|\frac{\cos(a-\lambda)t}{(a-\lambda)t}\right|_s^r\left|+\left|\int_s^r\frac{\cos(a-\lambda)t}{(a-\lambda)t^2}dt\right|\right.$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{s+r}{sr}\{|b-\lambda|^{-1}+|a-\lambda|^{-1}\}$$

$$\leqslant\frac{4}{\varepsilon}\cdot\frac{s+r}{sr}\to 0\ (s,\ r\to\infty).$$

因此，当 s，$r\to\infty$时，由（18）得

$$E|y_s-y_r|^2\to 0. \tag{20}$$

从而据§7.1引理3知，存在二阶矩随机变量 $y=y(a,\ b)$，使

$$E|y_r-y|^2\to 0\quad (r\to\infty), \tag{21}$$

且由§7.1定理4及y_r的定义知，$Ey_r=0$，从而

$$Ey=\lim_{r\to\infty}Ey_r=0.$$

引理 2 存在均方连续的正交增量过程$\{y(\lambda),-\infty<\lambda<\infty\}$，$Ey(\lambda)=0$，对任意$a$，$b$（$a<b$），有

$$E|y(b)-y(a)|^2=F(b)-F(a). \tag{22}$$

证明 设a，b（$a<b$）为$F(\lambda)$的连续点，令$y(a,\ b)$为引理1中得到的随机变量．我们先证明如c，d（$c<d$）为$F(\lambda)$的另外两个连续点，且（a，b）与（c，d）不相交，则

$$Ey(a,\ b)\overline{y(c,\ d)}=0.$$

实际上，由§7.1引理2，我们有

$$Ey(a,\ b)\overline{y(c,\ d)}=\lim_{r\to\infty}Ey_r(a,\ b)\overline{y_r(c,\ d)}$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\lim_{r\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}dF(\lambda)\int_0^r 2\int_a^b\cos(x-\lambda)t\,dx\,dt\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^r 2\int_c^d\cos(y-\lambda)u\,dy\,du\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^r 2\int_a^b\cos(x-\lambda)t\,dx\,dt\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^r 2\int_c^d\cos(y-\lambda)u\,dy\,du\right]dF(\lambda). \tag{23}$$

利用下面的事实

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^r\frac{\sin\alpha t}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ -\frac{1}{2}, & \alpha<0.\end{cases} \tag{24}$$

我们得

$$\int_0^{\infty}\int_a^b\cos(x-\lambda)t\,dx\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{t}[\sin(b-\lambda)t-\sin(a-\lambda)t]dt$$

$$=\begin{cases}\pi, & a<\lambda<b,\\ 0, & b<\lambda\text{ 或 }\lambda<a,\\ \frac{\pi}{2}, & \lambda=a\text{ 或 }\lambda=b.\end{cases} \tag{25}$$

由（23），（25）得

$$Ey(a,b)\overline{y(c,d)}=\begin{cases}\int_{a\vee c}^{b\wedge d}dF(\lambda), & \text{如 }a\vee c<b\wedge d,\\ 0, & \text{反之}.\end{cases} \tag{26}$$

（26）说明当 (a, b) 与 (c, d) 不相交时 $Ey(a,b)\overline{y(c,d)}=0$。往下证明存在正交增量过程 $\{y(\lambda)\}$ 满足(22)。

当 a，b 为 $F(\lambda)$ 的连续点时，由（26）

$$E|y(a,\ b)|^2=\int_a^b dF(\lambda)$$
$$=F(b)-F(a)。\tag{27}$$

其次，对$F(\lambda)$的任意连续点$\beta<b$，由(26)及(27)

$$E|y(a,\ b)-y(\beta,\ b)|^2=|F(a)-F(\beta)|\to 0$$
$$(a,\ \beta\to-\infty),$$

可见对$F(\lambda)$的每一连续点b，存在二阶矩变量$y(b)$，使

$$y(a,\ b)\xrightarrow{L_2}y(b)(a\to-\infty)。\tag{28}$$

由于$y(a,\ b)=y(\beta,\ a)-y(\beta,\ b)$，$\beta<a<b$。因此由(28)

$$y(a,\ b)=y(b)-y(a),\tag{29}$$

故由(29)及(26)知$\{y(b)\}$具有正交增量，且由(28)及$Ey(a,\ b)=0$知$Ey(b)=0$。此外由(29)，(27)知

$$E|y(b)-y(a)|^2=E|y(a,\ b)|^2$$
$$=F(b)-F(a),\tag{30}$$

上式对$F(\lambda)$的任意连续点$a<b$都成立。

将$\{y(b)\}$的定义域扩大到$F(\lambda)$的非连续点ξ上，定义

$$y(\xi)=\underset{b\uparrow\xi}{\text{l.i.m}}\ y(b),\tag{31}$$

其中b取沿着$F(\lambda)$的连续点。于是得二阶矩过程$\{y(\lambda),\ -\infty<\lambda<\infty\}$且$Ey(\lambda)=0$。运用§7.1引理2，由(26)及(31)可知$\{y(\lambda),\ -\infty<\lambda<\infty\}$为正交增量过程，由(30)及(31)可知，(30)对任意$-\infty<a<b<\infty$都成立。又因$F(\lambda)$左连续，故由(30)知$\{y(\lambda)\}$均方左连续。

定理3 平稳过程$\{x_t,\ t\in T\}$可表示成

$$x_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dy(\lambda),\tag{32}$$

其中$\{y(\lambda)\}$为均方左连续正交增量过程，且不计随机变量之差由$\{x_t\}$唯一确定。此外，$\{y(\lambda)\}$还满足

（i）对任意$\lambda_1<\lambda_2$

$$E|y(\lambda_2)-y(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1), \tag{33}$$

其中$F(\lambda)$为$\{x_t\}$的谱函数；

（ii）对一切λ，$Ey(\lambda)=0$。

如果$T=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$，则（32）化为

$$x_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dy(\lambda). \tag{34}$$

称（32）或（34）中的$\{y(\lambda)\}$为$\{x_t\}$的**随机谱函数**。

证明 由引理2存在均方左连续的正交增量过程$\{y(\lambda)\}$满足（i），（ii）。往下证（32）成立。设$a<b$为$F(\lambda)$的两个连续点，由（17），（21），（28）我们有

$$E x_t\overline{[y(b)-y(a)]}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(t-s)\int_a^b e^{itu}duds.$$

由定理1上式右方

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_a^b e^{it\lambda}\cos(u-\lambda)sdudsdF(\lambda)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{it\lambda}s^{-1}[\sin(b-\lambda)s$$

$$-\sin(a-\lambda)s]dsdF(\lambda)$$

$$=\int_a^b e^{it\lambda}dF(\lambda). \tag{35}$$

最后一个等号应用了（24）式。

注意$e^{it\lambda}\in L_2(dF)$，由定义存在阶梯函数$g_n(\lambda)$使

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(\lambda)-e^{it\lambda}|^2dF(\lambda)\to 0\ (n\to\infty)$$

且使其跳跃点在$F(\lambda)$的连续点上。由定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(\lambda)dy(\lambda)\xrightarrow{L_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dy(\lambda)\ (n\to\infty),$$

应用（35）可推得

$$E x_t \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda) dy(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \overline{g_n(\lambda)} dF(\lambda).$$

于是我们得

$$E x_t \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dy(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} E x_t \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda) dy(\lambda)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \overline{g_n(\lambda)} dF(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} e^{-it\lambda} dF(\lambda)$$

$$= B(0) = 1. \tag{36}$$

另一方面，由§7.1定理5

$$E\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dy(\lambda)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{it\lambda}|^2 dF(\lambda) = B(0) = 1, \tag{37}$$

于是由（36），（37）得

$$E\left|x_t - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dy(\lambda)\right|^2$$

$$= E|x_t|^2 - 2\mathrm{Re} E x_t \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dy(\lambda)}$$

$$+ E\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dy(\lambda)\right|^2$$

$$= 0,$$

故（32）成立。

最后证明$\{y(\lambda)\}$的唯一性。因$\{e^{it\lambda}, -\infty < t < \infty\}$在$L_2(dF)$中完备，对任意实数$a < b$，必存在

$$g_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{N_n} c_k e^{it_k\lambda}$$

使

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - I_{(a,b)}(\lambda)|^2 dF(\lambda) = 0,$$

故

$$E\left|\int_{-\infty}^{\infty}[g_n(\lambda)-I_{(a,b)}(\lambda)]dy(\lambda)\right|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(\lambda)-I_{(a,b)}(\lambda)|^2dF(\lambda)\to 0\ (n\to\infty).$$

换言之

$$\sum_{k=1}^{N_n} c_k x_{t_k}=\sum_{k=1}^{N_n} c_k\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_k\lambda}dy(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda)dy(\lambda)$$

$$\xrightarrow{L_2}\int_{-\infty}^{\infty} I_{(a,b)}(\lambda)dy(\lambda)=y(b)-y(a).$$

可见满足（32）的$\{y(\lambda)\}$其增量由$\{x_t\}$唯一确定。由于均方极限是唯一的，故由上式知，除相差一随机变量外，在几乎处处相等意义下$\{y(\lambda)\}$是唯一的。

当$T=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$时，用相同的方法可证（34）成立。

下面考虑当$\{x_t\}$取实值时的谱分解。我们先指出后面要用到的一个事实。设$\{\eta_t, t\geq 0\}$为正交增量过程，§7.1已指出存在唯一的单调不减实值函数$F(t)$，对任意$s\leq t$有

$$E|\eta_t-\eta_s|^2=F(t)-F(s). \tag{38}$$

由$F(t)$的单调不减性知其不连续点集A为可列集（从而η_t的均方不连续点至多可列多个），而且对任意$t\geq 0$，当$s\downarrow t$时$F(t+0)$存在。于是

$$E|\eta_s-\eta_h|^2=|F(s)-F(h)|\to 0\ (s\downarrow t, h\downarrow t).$$

可见存在η_{t+0}使$\eta_s\xrightarrow{L_2}\eta_{t+0}$ $(s\downarrow t)$。由（38）可知，当$t\notin A$时

$$\eta_{t+0}=\eta_t\quad \text{a.e.}.$$

同理可知对任意$t>0$，η_{t-0}存在且当$t\notin A$时，

$$\eta_{t-0}=\eta_t \quad \text{a.e.}.$$

定理 4 设$\{x_t, \ t>0\}$为实值均方连续平稳过程，$Ex_t=0$，$Ex_t^2=1$。则x_t可表示成

$$x_t=\hat{\eta}_0+\int_{0+}^{\infty}\cos\lambda t dy(\lambda)+\int_0^{\infty}\sin\lambda t dz(\lambda). \tag{39}$$

对$\{x_n, \ n=0, \ \pm 1, \ \cdots\}$，(39) 改写为

$$x_n=\hat{\eta}_0+\int_{0+}^{\pi}\cos\lambda n dy(\lambda)+\int_0^{\pi}\sin\lambda n dz(\lambda), \tag{40}$$

其中

(1)° $\hat{\eta}_0$为与t无关的实值随机变量且$E|\hat{\eta}_0|^2=F(0^+)-F(0)$，$F(\lambda)$为$\{x_t\}$的谱函数；

(2)° $\{y(\lambda), \ \lambda\geqslant 0\}$与$\{z(\lambda), \ \lambda\geqslant 0\}$为均值等于零的实值、均方左连续正交增量过程，且不计随机变量之差由$\{x_t\}$唯一决定；

(3)° 对任意$0\leqslant\lambda_1<\lambda_3\leqslant\lambda_2<\lambda_4$，

$$\begin{aligned}E[y(\lambda_2)-y(\lambda_1)][y(\lambda_4)-y(\lambda_3)]&=E[z(\lambda_2)-z(\lambda_1)][z(\lambda_4)-z(\lambda_3)]\\&=2[F(\lambda_2)-F(\lambda_3)];\end{aligned} \tag{41}$$

(4)° 对任意$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4\geqslant 0$，

$$E[y(\lambda_2)-y(\lambda_1)][z(\lambda_4)-z(\lambda_3)]=0. \tag{42}$$

证明 (40) 的证法与 (39) 相同，下面证明 (39)。由定理3，设x_t的谱分解为

$$x_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\eta(\lambda), \tag{43}$$

其中$E\eta(\lambda)=0$，$E|\eta(\lambda_2)-\eta(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$ $(\lambda_2>\lambda_1)$，$F(\lambda)$为$\{x_t\}$的谱函数。$\{x_t\}$实值，所以

$$x_t=\bar{x}_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}d\bar{\eta}(\lambda). \tag{44}$$

因$\{\eta(\lambda)\}$由$\{x_t\}$唯一确定，故对$\lambda_2>\lambda_1$，由 (43)，(44) 知

$$\eta(\lambda_2)-\eta(\lambda_1)=\bar{\eta}(-\lambda_1+0)-\bar{\eta}(-\lambda_2+0) \quad \text{a.e.}, \tag{45}$$

于是对任意 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3<\lambda_4$，因$\{\eta(\lambda)\}$为正交增量过程

$$
\begin{aligned}
&E[\eta(\lambda_2)-\eta(\lambda_1)][\eta(\lambda_4)-\eta(\lambda_3)]\\
&=E[\eta(\lambda_2)-\eta(\lambda_1)]\overline{[\eta(-\lambda_3+0)-\eta(-\lambda_4+0)]}\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

定义实值过程

$$
y(\lambda)=\eta(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda),
$$

$$
z(\lambda)=i[\eta(\lambda)-\bar{\eta}(\lambda)],\quad -\infty<\lambda<\infty.
$$

下面证明$\{y(\lambda)\}$和$\{z(\lambda)\}$满足（2）*—（4）*。为简便计，记$y(\lambda_k)=y_k$，$z(\lambda_k)=z_k$，$\eta(\lambda_k)=\eta_k$。

显见$Ey_\lambda=Ez_\lambda=0$且都是均方左连续的。令$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3<\lambda_4$，由（46）及$\{\eta_\lambda\}$的正交增量性

$$
\begin{aligned}
&E(y_2-y_1)(y_4-y_3)\\
&=E[(\eta_2-\eta_1)+\overline{(\eta_2-\eta_1)}][(\eta_4-\eta_3)+\overline{(\eta_4-\eta_3)}]\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

可见$\{y_\lambda\}$为正交增量过程。同理可证$\{z_\lambda\}$也是正交增量过程。其次，对$0\leqslant\lambda_1<\lambda_3\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_4$，因

$$
\eta_2-\eta_1=(\eta_2-\eta_3)+(\eta_3-\eta_1),
$$

$$
\eta_4-\eta_3=(\eta_4-\eta_2)+(\eta_2-\eta_3).
$$

将上式代入(47)并注意(46)，得

$$
E(y_2-y_1)(y_4-y_3)=2E|\eta_2-\eta_3|^2=2[F(\lambda_2)-F(\lambda_3)].
$$

同理可证

$$
E(z_2-z_1)(z_4-z_3)=2[F(\lambda_2)-F(\lambda_3)].
$$

此即(41)式。类似地对任意λ_1，λ_2，λ_3，$\lambda_4\geqslant0$，可证(42)成立，即

$$
E(y_2-y_1)(z_4-z_3)=0.
$$

往下证明(39)式成立。由(43)

$$
x_t=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda t\,d\eta(\lambda)+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda t\,d\eta(\lambda).
\tag{48}
$$

因为$\cos\lambda t$是λ的偶函数及(45)，故

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda t\,d\eta(\lambda)\\
&\quad=[\eta(0^+)-\eta(0)]+\int_{-\infty}^{0-}\cos\lambda t\,d\eta(\lambda)\\
&\quad+\int_{0+}^{\infty}\cos\lambda t\,d\eta(\lambda)\\
&\quad=[\eta(0^+)-\eta(0)]+\int_{0+}^{\infty}\cos\lambda t\,d\bar{\eta}(\lambda)\\
&\quad+\int_{0+}^{\infty}\cos\lambda t\,d\eta(\lambda)\\
&=\hat{\eta}_0+\int_{0+}^{\infty}\cos\lambda t\,dy(\lambda).
\end{aligned}
\tag{49}
$$

其中$\hat{\eta}_0=\eta(0^+)-\eta(0)$与$t$无关。其次，因$\sin\lambda t$是$\lambda$的奇函数且当$\lambda=0$时$\sin\lambda t=0$，故同上由(45)得

$$
i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda t\,d\eta(\lambda)=\int_{0}^{\infty}\sin\lambda t\,dz(\lambda).
\tag{50}
$$

由(48)—(50)得证(39)成立。剩下证明$\hat{\eta}_0$满足(1)°。我们已在前面指出过，对任意$\lambda\geqslant 0$，$\eta(\lambda+0)$存在。因此由(45)

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta(0^+)-\eta(0)}&=\underset{\lambda\downarrow 0}{\mathrm{l.i.m}}[\overline{\eta(\lambda)}-\overline{\eta(0)}]\\
&=\underset{\lambda\downarrow 0}{\mathrm{l.i.m}}[\eta(0^+)-\eta(-\lambda+0)].
\end{aligned}
$$

取λ为$F(\lambda)$的（从而也是$\eta(\lambda)$的）一列连续点，并注意$\{\eta(\lambda)\}$均方左连续，则上式右方等于$\eta(0^+)-\eta(0)$。由此可见$\hat{\eta}_0$是实值的。易知

$$
E|\hat{\eta}_0|^2=E|\eta(0^+)-\eta(0)|^2=F(0^+)-F(0).
$$

定理证毕。

特别如$\{x_t\}$的谱函数$F(\lambda)$在0点连续，则$\{\eta(\lambda)\}$在0点均方连续，故$\hat{\eta}_0=0$。这时x_t可表成

$$
x_t=\int_{0}^{\infty}\cos\lambda t\,dy(\lambda)+\int_{0}^{\infty}\sin\lambda t\,dz(\lambda).
\tag{51}
$$

在实际应用中通常都假定$\{x_t\}$具有谱密度，故(51)成立。

在下一节我们将应用$\{x_t\}$的谱分解导出平稳过程的遍历性定理。

习 题

1. 设$E|\xi|^2<\infty$，定义$x_n=\xi$，$n=0,\pm1,\cdots$。证明$\{x_n\}$是平稳过程并求其相关函数与谱函数。

2. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为均方左连续的正交增量过程，$Ex_t=0$且$E|x_t-x_s|^2=F(t)-F(s)$，$t\geqslant s$。其中$F(t)$有界。
试证

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dx(\lambda),\qquad -\infty<t<\infty$$

为平稳过程。

3. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为正交增量过程，$Ex_t=0$且满足

$$E|x_t-x_s|^2=t-s\qquad(t\geqslant s).$$

如$f(t)$为满足$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$的函数，证明

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)\,dx(s),\quad -\infty<t<\infty$$

为平稳过程。

4. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为正交增量过程。对任一固定的t，定义

$$F_t(s)=\begin{cases}E|x_s-x_t|^2, & s\geqslant t,\\ -E|x_s-x_t|^2, & s<t.\end{cases}$$

证明对任意$t_1\neq t_2$有$F_{t_1}=F_{t_2}+c$（其中c为与t_1,t_2有关的常数）。

5. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为第3题中的正交增量过程。令$\xi_t=x_t-x_{t-1}$ $(-\infty<t<\infty)$，证明$\{\xi_t\}$为平稳过程，并求其协方差函数及谱密度函数。

6. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为平稳过程，$Ex_t=0$且有谱密度$f(\lambda)=0$，$|\lambda|\geqslant a$。试证$\{x_t\}$的相关函数

$$B(\tau)\geqslant B(0)\cos a\tau,\quad |\tau|\leqslant\frac{\pi}{2a}.$$

7. 设$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$为平稳过程，其相关函数为$B(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，$\alpha>0$。试求$\{x_t\}$的谱密度并指出谱密度的最大值。

8. 设平稳过程$\{x_t,-\infty<t<\infty\}$的相关函数为

$$B(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau,\quad \alpha>0.$$

试求$\{x_t\}$的谱密度函数。

9. 设平稳过程$\{x_t, t\in[a, b]\}$具有谱分解且$Ex_t=0$，证明$\{x_t\}$必均方连续。

10. 设$F(\lambda)$为$T=[a, b]$上的左连续分布函数。定义

$$K(\lambda_1,\lambda_2)=\min\{F(\lambda_1),\ F(\lambda_2)\},\ \lambda_1,\lambda_2\in T.$$

证明存在均方左连续的正交增量过程$\{x_t, t\in T\}$，使其协方差函数为$K(\lambda_1,\lambda_2)$。

11. 设均值为零的均方连续平稳过程$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$，其谱函数$F(\lambda)$具有性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 dF(\lambda)<\infty.$$

证明$\{x_t\}$均方可导。

12. 设$\{y_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$为平稳过程，$Ey_n=0$。又实数列$\{a_k\}$满足$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2<\infty$。令

$$x_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{n-k},\qquad n=0, \pm 1, \cdots.$$

试求$\{x_n\}$的随机谱函数。

13. 假设同上题，如$\{y_n\}$有谱密度$f(\lambda)$，试求$\{x_n\}$的谱密度函数。

14. 设$\{x_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$为平稳过程，$Ex_n=0$。试证如$\{x_n\}$有谱密度

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\lambda}\right|^2,$$

其中N为正整数，$\{a_k\}$是不全为零的实数。则x_n必可表示成

$$x_n=\sum_{k=0}^{N} a_k y_{n-k},$$

其中$\{y_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$是白噪声。

15. 设$\{x_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$为平稳过程，$Ex_n=0$。如$\{x_n\}$有谱密度

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k e^{-ik\lambda}}{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k e^{-ik\lambda}}\right|^2$$

其中M, N为正整数，$\{a_k\}$，$\{b_k\}$为不全等于零的实数，证明存在白噪声过程$\{y_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$，使

$$\sum_{k=0}^{N} b_k x_{n-k}=\sum_{j=0}^{M} a_j y_{n-j}.$$

提示 利用第13及14题。

§7.4 平稳过程的均方遍历性

我们知道相互独立同分布的随机变量序列$\{x_n, n\geqslant 1\}$，如$E|x_n|<\infty$，则服从强大数定律，即

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k=m\right)=1, \qquad (1)$$

其中$m=Ex_n$。强大数定律指出，为寻求x_n的统计平均值m，我们只需进行一次较长时间的观测，再对所得的观测值求其算术平均值即可用它代替实际值m。随机过程的这种性质称为**遍历性**。自然对平稳过程也会提出(1)何时成立的问题。

大数定律有强弱之分，平稳过程的遍历性定理按照不同的收敛概念也有两种，一种是对强平稳过程以概率1收敛意义下的(强)遍历定理，另一种对弱平稳过程按均方收敛意义下的均方遍历定理。本节只限于介绍后者。自然对弱平稳过程也可考虑强遍历定理何时成立的问题。

定理1 设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为均方连续平稳过程，则存在随机变量$\eta$，使

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}(x_s-m)ds\xrightarrow{L_2}\eta \quad (t\to\infty) \qquad (2)$$

且

$$E|\eta|^2=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}K(\tau)d\tau, \tag{3}$$

其中$m=Ex_t$，$K(\tau)$为$\{x_t\}$的协方差函数。

证明 不妨设$m=0$，这时$K(\tau)=B(\tau)$。设$\{x_t\}$的谱分解为

$$x_s=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}dy(\lambda), \tag{4}$$

$$E|y(\lambda_2)-y(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1),\quad \lambda_2>\lambda_1, \tag{5}$$

其中$F(\lambda)$为$\{x_t\}$的谱函数。由(4)得

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}x_s ds=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}e^{i\lambda s}dt\right]dy(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_t(\lambda)dy(\lambda), \tag{6}$$

其中

$$\phi_t(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda t}{\lambda t}, & \lambda\neq 0,\\ 1, & \lambda=0.\end{cases} \tag{7}$$

令$\eta=y(0+)-y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{0\}}(\lambda)dy(\lambda)$。则由(6)我们得

$$E\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}x_s ds-\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{0\}}(\lambda)dy(\lambda)\right|^2$$

$$=E\left|\int_{-\infty}^{\infty}[\phi_t(\lambda)-I_{\{0\}}(\lambda)]dy(\lambda)\right|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\phi_t(\lambda)-I_{\{0\}}(\lambda)]^2dF(\lambda)$$

$$\longrightarrow 0\quad (t\to\infty),$$

故

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}x_s ds\xrightarrow{L_2}\eta\ (t\to\infty). \tag{8}$$

其次，由$B(\tau)$的谱分解可得

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}B(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}e^{i\lambda\tau}d\tau\right]dF(\lambda)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_t(\lambda)dF(\lambda)$$
$$\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{0\}}(\lambda)dF(\lambda)$$
$$=F(0+)-F(0). \qquad (9)$$

由(8)及(6)得

$$E|\eta|^2=\lim_{t\to\infty}E\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}x_s ds\right|^2$$
$$=\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_t^2(\lambda)dF(\lambda)=F(0+)-F(0). \qquad (10)$$

比较(9)，(10)即得(3)。

由此定理立得

定理 2 设$\{x_t,\ -\infty<t<\infty\}$为均方连续平稳过程。则

$$\lim_{t\to\infty}E\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}x_s ds-m\right|^2=0 \qquad (11)$$

的充要条件为$\{x_t\}$的谱函数$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，或等价地为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}K(\tau)d\tau=0. \qquad (12)$$

证明 由(9)知条件(12)等价于$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续。其次，如(12)成立，由定理知$E|\eta|^2=0$，故(11)成立。反之，如(11)成立，由均方极限的唯一性知$E|\eta|^2=0$，故(12)成立。

读者注意，$\{x_t\}$的谱函数$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续等价于随机谱函数$\{y(\lambda)\}$在$\lambda=0$点均方连续。此外，检查定理1（从而定理2）的证明可发现用$\frac{1}{t}\int_0^t$代替(2)，(3)中的$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}$，

定理的结论仍成立，前者为实际中常用的形式。由(11)知

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} x_s ds - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

因此当 t 充分大时，就可用 x_t 对时间的平均值代替 m。

例 1 设 $x_t = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$ 为§7.3例 3 的实值平稳过程，则 $K(\tau) = B(\tau) = \cos\lambda\tau$，它满足定理的条件(12)式。故我们有

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} x_s ds \xrightarrow{L_2} 0 \ (t\to\infty).$$

作为定理 2 的应用，我们考虑如何根据观测值计算平稳序列 $\{x_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 的相关函数 $B(\tau)$。不失一般性，设 $Ex_n = 0$。定义新的序列

$$\omega_k = x_{k+\tau}\bar{x}_k, \quad k = 0, \pm 1, \cdots, \tag{13}$$

假定对任意固定的 τ，$\{\omega_k\}$ 为平稳过程，即假定 $E|\omega_k|^2 < \infty$ 且 $R(m) = E\omega_{k+m}\bar{\omega}_k$ 不依赖于 k。

定理 3 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} R(m) = |B(\tau)|^2 \tag{14}$$

时，成立

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_{k+\tau}\bar{x}_k - B(\tau)\right|^2 = 0. \tag{15}$$

证明 由设 $\{\omega_k\}$ 为平稳过程，$E\omega_k = Ex_{k+\tau}\bar{x}_k = B(\tau)$ 与 k 无关。故由定理 2 及其下的注意可知(15)成立的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} E(\omega_{m+\tau} - B(\tau))\overline{(\omega_\tau - B(\tau))} = 0.$$

易见上式等价于(14)成立。

条件(14)涉及原过程 $\{x_n\}$ 的四阶矩，对应用很不方便。当 $\{x_n\}$ 为正态过程时，由于其有限维分布可由前二阶矩确定，这时可望条件(15)化为只涉及前二阶矩的形式。这就是下面的定理。

定理 4 设$\{x_n, \ n=0, \pm 1, \cdots\}$为实值正态平稳过程，$Ex_n=0$。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[B(k)]^2=0, \tag{16}$$

则对一切$\tau=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，有

$$\lim_{n\to\infty}E\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_{k+\tau}x_k-B(\tau)\right|^2=0. \tag{17}$$

证明 因$\{x_n\}$为正态过程，故它是强平稳正态过程。又因$Ex_n=0$，于是我们有

$$E(x_ix_jx_kx_l)=Ex_ix_jEx_kx_l+Ex_ix_kEx_jx_l+Ex_ix_lEx_jx_k,$$

所以

$$E(x_kx_{k+\tau}x_{k+m}x_{k+m+\tau})=[B(\tau)]^2+[B(m)]^2$$
$$+B(m+\tau)B(m-\tau). \tag{18}$$

由此可见，如令$\omega_k=x_kx_{k+\tau}$，则

$$E(\omega_k)^2=E(x_kx_{k+\tau})^2<\infty,$$

$E(\omega_k\omega_{k+m})=E(x_kx_{k+\tau}x_{k+m}x_{k+m+\tau})$与$k$无关，因此$\{\omega_k\}$为平稳过程。于是由定理3知，为证(17)只需证明(16)可推出(14)即可。

今设(16)成立。则对任一τ有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[B(k\pm\tau)]^2=0. \tag{19}$$

由于对任意实数a，b，恒有$|ab|\leqslant a^2+b^2$，故

$$|B(m+\tau)B(m-\tau)|\leqslant[B(m+\tau)]^2+[B(m-\tau)]^2 \tag{20}$$

由(18)，(19)，(20)得

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}E(\omega_k\omega_{k+m})$$
$$=[B(\tau)]^2+\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}[B(m)]^2$$

$$+B(m+\tau)B(m-\tau)]$$
$$\to[B(\tau)]^2 \quad (n\to\infty),$$

此即(14)式。

§7.5 平稳序列的线性预测

在预测论中，经常要遇到如下的问题。

（1）预测

假定我们所关心的随机过程$\{x_n\}$在时刻$n\in[n_1, n_2]$的值已被观测到，如何根据这批观测结果，去估计（预测）过程在未来时刻$n>n_2$的值x_n?

（2）内插

假定我们的观测数据$\{x_n, n\in[n_1, n_2]\}$由于遗漏或其它原因而残缺不全，例如某x_s值丢失，$s\in[n_1, n_2]$。如何根据我们现有的观测值x_n去补全（内插）缺值x_s?

（3）滤波

一般说来，观测值x_n是由信号s_n和干扰ξ_n混杂而成。假设x_n可表成

$$x_n=s_n+\xi_n, \quad n\in[n_1, n_2],$$

如何根据$\{x_n, n\in[n_1, n_2]\}$把干扰ξ_{n_2}滤掉，进而求出有用信号s_{n_2}?

本节仅限于讨论(1)。

（一）平稳序列的预测

预测问题的一般提法为如何对以往积累的历史观测数据进行分析，进而确定出适当的数学模型，然后再根据选好的模型对未来可能出现的结果作出预测。

设$\{x_n, n=0, \pm1, \cdots\}$为我们所关心的过程，本节恒设$\{x_n\}$为平稳序列且$Ex_n=0$. 我们的问题是已知$x_{-N}$, x_{-N+1}, $\cdots$, x_0(N可取∞); 要预测x_n($n>0$)。令$\hat{x}_n$为x_n的预测值，它是与$\{x_k, -N\leqslant k\leqslant 0\}$有关的函数，而且自然要求$\hat{x}_n$与$x_n$的误差应

是"最小"。所谓最小可以有各种标准，视具体问题而定。因为我们所考虑的过程为弱平稳过程，故这里规定使均方误差$E|x_n-\hat{x}_n|^2$达到最小作为衡量预报的最优指标。下面我们给出$\hat{x}_n$的确切定义。令

$$\mathscr{F}(N)=\{g(\omega):g\text{为}\sigma(x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0)\text{可测随机变量且}\ E|g|^2<\infty\}.$$

固定$n>0$，称满足下列条件的$\hat{x}_n\in\mathscr{F}(N)$：

$$E|x_n-\hat{x}_n|^2=\inf_{g\in\mathscr{F}(N)}E|x_n-g|^2 \tag{1}$$

为$\{x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0\}$对$x_n$的最优（均方）预报值。

注意，满足(1)的$\hat{x}_n\in\mathscr{F}(N)$在等价意义下是唯一的。实际上，如$x_n^*\in\mathscr{F}(N)$也满足(1)。令

$$d=\inf_{g\in\mathscr{F}(N)}E|x_n-g|^2,$$

则

$$E|\hat{x}_n-x_n^*|^2+E|2x_n-\hat{x}_n-x_n^*|^2=2\left(E|x_n-\hat{x}_n|^2+E|x_n-x_n^*|^2\right)$$
$$=4d. \tag{2}$$

因为$\frac{1}{2}(\hat{x}_n+x_n^*)\in\mathscr{F}(N)$，故$E|x_n-\frac{1}{2}(\hat{x}_n+x_n^*)|^2\geqslant d$，所以

$$E|2x_n-\hat{x}_n-x_n^*|^2=4E|x_n-\frac{1}{2}(\hat{x}_n+x_n^*)|^2\geqslant 4d.$$

代入(2)得

$$E|\hat{x}_n-x_n^*|^2=4d-E|2x_n-\hat{x}_n-x_n^*|^2\leqslant 4d-4d=0. \tag{3}$$

由(3)并应用切比谢夫不等式可得

$$P(\hat{x}_n\neq x_n^*)=0.$$

读者注意，唯一性的证明中没有用到$\{x_k\}$的平稳性，只需$\mathscr{F}(N)$为线性集即可。下面的定理也如此。因此可将定理中的$\{x_k\}$换成任何二阶矩序列，将$\mathscr{F}(N)$换成与$\{x_k\}$有关的线性集。

定理 1　$\{x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0\}$对$x_n$的最优预报值为

$$\hat{x}_n=E(x_n|x_{-N},\ \cdots,\ x_0) \tag{4}$$

且是唯一的(在等价意义下)。

证明 令$\mathscr{G}=\sigma(x_{-N},\ \cdots,\ x_0)$。任取$g\in\mathscr{F}(N)$，则

$$E[(x_n-g)^2|\mathscr{G}]=E[\{x_n-E(x_n|\mathscr{G})\}^2|\mathscr{G}]+E[\{E(x_n|\mathscr{G})-g\}^2|\mathscr{G}]+2E[\{x_n-E(x_n|\mathscr{G})\}\cdot\{E(x_n|\mathscr{G})-g\}|\mathscr{G}],\tag{5}$$

因为$E(x_n|\mathscr{G})-g$为$\mathscr{G}$可测，故(5)右方第三项等于

$$2\{E(x_n|\mathscr{G})-g\}E[x_n-E(x_n|\mathscr{G})|\mathscr{G}]=0.\tag{6}$$

由(5)，(6)得

$$E[(x_n-g)^2|\mathscr{G}]\geqslant E[\{x_n-E(x_n|\mathscr{G})\}^2|\mathscr{G}],$$

对上式两边取数学期望得

$$E(x_n-g)^2\geqslant E[x_n-E(x_n|\mathscr{G})]^2.$$

由g的任意性得证(4)。$\hat{x}_n$的唯一性前面已证。

定理1虽然解决了最优预报值问题，但由于$E(x_n|x_{-N},\cdots x_0)$的具体表达式不清楚，其实用价值不大。因此，下面我们改为考虑当g可表为$\{x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0\}$的线性函数的情形，这是较为简单有用的形式，其预测公式只涉及过程的前二阶矩。

(二) 平稳序列的线性预测

令

$$\mathscr{H}(N)=\left\{\sum_{i=0}^{N}c_ix_{i-N}:c_i(0\leqslant i\leqslant N)\text{实数}\right\},$$

$$\mathscr{H}=\left\{\sum_{i=1}^{k}c_ix_{n_i}\text{及其均方极限，其中}k\geqslant 1,\ n_i\leqslant 0,\ c_i\text{为实数}\right\},$$

$$\mathscr{L}_2=\{x:E|x|^2<\infty\}.$$

由定义知，在均方收敛意义下，$\mathscr{H}(N)$及$\mathscr{H}$都是$\mathscr{L}_2$的闭线性子空间。我们的问题为已知$\{x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0\}$及已给$n>0$，寻求$\hat{x}_n\in\mathscr{H}(N)$使

$$E|x_n-\hat{x}_n|^2=\inf_{Y\in\mathscr{H}(N)} E|x_n-Y|^2. \tag{7}$$

称满足(7)的$\hat{x}_n$为$\{x_k,\ -N\leqslant k\leqslant 0\}$对$x_n$的**最优线性预报值**。类似地，可定义$\{x_k,\ -\infty< k\leqslant 0\}$对$x_n$的最优线性预报值。

下面的两个定理分别指出满足(7)的$\hat{x}_n$在等价意义下唯一存在，且当$\{x_k,\ k=0,\ \pm 1,\ \cdots\}$为正态平稳序列时，最优线性预报值与最优预报值重合。

定理 2 设$x\in\mathscr{L}_2$，则

(i) 存在唯一的$\hat{x}\in\mathscr{H}(N)$，使

$$E|x-\hat{x}|^2=\inf_{y\in\mathscr{H}(N)} E|x-y|^2; \tag{8}$$

(ii) $\hat{x}\in\mathscr{H}(N)$满足(8)的充要条件为对一切$y\in\mathscr{H}(N)$，有

$$E(x-\hat{x})y=0. \tag{9}$$

证明 (i) 令

$$d=\inf_{y\in\mathscr{H}(N)} E|x-y|^2.$$

选取$y_k\in\mathscr{H}(N)$，使

$$\lim_{k\to\infty} E|x-y_k|^2=d. \tag{10}$$

对任意u，v，我们有

$$E|y_u-y_v|^2+E|2x-y_u-y_v|^2=2\{E|x-y_u|^2+E|x-y_v|^2\}. \tag{11}$$

因$\frac{1}{2}(y_u+y_v)\in\mathscr{H}(N)$，故

$$E|2x-y_u-y_v|^2=4E|x-\frac{1}{2}(y_u+y_v)|^2\geqslant 4d.$$

代入(11)得

$$E|y_u-y_v|^2\leqslant 2\{E|x-y_u|^2+E|x-y_v|^2\}-4d.$$

由(10)上式右方当u，$v\to\infty$时趋于零。从而存在$\hat{x}\in\mathscr{H}(N)$，使$y_k\xrightarrow{L_2}\hat{x}\ (k\to\infty)$。故$x-y_k\xrightarrow{L_2}x-\hat{x}$。于是由(10)知

$$E|x-\hat{x}|^2=\lim_{k\to\infty}E|x-y_k|^2=d.$$

唯一性的证明与定理1的相同。

(ii) 充分性：设(9)成立。则对任一$y\in\mathscr{H}(N)$，有

$$E|x-y|^2=E|x-\hat{x}|^2+2E(x-\hat{x})(\hat{x}-y)+E|\hat{x}-y|^2.$$

因$\hat{x}-y\in\mathscr{H}(N)$，故由(9)知上式右方第二项等于零。所以

$$E|x-y|^2=E|x-\hat{x}|^2+E|\hat{x}-y|^2\geqslant E|x-\hat{x}|^2.$$

可见$\hat{x}$满足(8)。

必要性：设$\hat{x}$满足(8)。如存在$y\in\mathscr{H}(N)$使
$E(x-\hat{x})y=a\neq0$，则$E|y|^2\neq0$。下证随机变量

$$x^*=\hat{x}+\frac{a}{E|y|^2}\cdot y \tag{12}$$

满足(8)，因而$\hat{x}$不可能是x的最优线性预报值。注意$x^*\in\mathscr{H}(N)$，由(12)

$$x^*-\hat{x}=\frac{ay}{E|y|^2},$$

所以

$$\begin{aligned}E|x-x^*|^2&=E|(x-\hat{x})-(x^*-\hat{x})|^2\\&=E|x-\hat{x}|^2+E|x^*-\hat{x}|^2-2E(x-\hat{x})(x^*-\hat{x})\\&=E|x-\hat{x}|^2+\frac{a^2Ey^2}{(E|y|^2)^2}-2\frac{aE(x-\hat{x})y}{E|y|^2}\\&=E|x-\hat{x}|^2-\frac{a^2}{E|y|^2}<E|x-\hat{x}|^2.\end{aligned}$$

定理2的简单几何解释如下：视$\mathscr{L}_2$为向量空间并定义$\mathscr{L}_2$中的内积为$(x,\ y)=Exy$，x的范数为$\|x\|=\sqrt{Ex^2}$，x与y的距离为$\|x-y\|$。称x与y**正交**(或**垂直**)，如$(x,\ y)=0$。定理2指出，对任一$x\in\mathscr{L}_2$，存在唯一的$\hat{x}\in\mathscr{H}(N)$，使$\hat{x}$离x最近。此$\hat{x}$即是使$x-\hat{x}$垂直于$\mathscr{H}(N)$中的一切向量。如图17所示。换言之，$\hat{x}$是x在$\mathscr{H}(N)$中的投影。

读者注意，定理的证明只用到$\mathscr{H}(N)$为线性闭集这一条件，

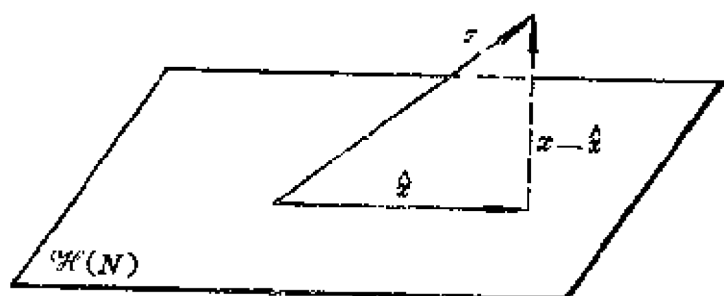


图 17

故以$\mathscr{H}$或者$\mathscr{L}_2$的其它线性闭子集代替$\mathscr{H}(N)$，定理3的结论仍成立。

例1 设x_1，x_2为两个二阶矩变量，其均值μ_1，μ_2，方差σ_1^2，σ_2^2及互协方差$\sigma_{12}=E(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)$都已知。
求$\hat{x}_1=\hat{a}+\hat{b}x_2$($\hat{a}$，$\hat{b}$实数)使$E|x_1-\hat{x}_1|^2$最小。

令$\mathscr{H}_0=\{a+bx_2: a, b \text{实数}\}$。取

$$y=a+b(x_2-\mu_2)\in\mathscr{H}_0.$$

由(9)

$$E\{x_1-(\hat{a}+\hat{b}x_2)\}\{a+b(x_2-\mu_2)\}=0.$$

在上式中先令$a=1$，$b=0$后令$a=0$，$b=1$可得

$$Ex_1=\hat{a}+\hat{b}Ex_2\text{或}\hat{a}=\mu_1-\hat{b}\mu_2$$

及

$$\sigma_{12}=\hat{b}\sigma_2^2,$$

故

$$\hat{x}_1=\mu_1-\hat{b}\mu_2+\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}x_2$$

$$=\mu_1+\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2-\mu_2).$$

例2 设x的均值与方差已知，在没有其它信息的情况下，求实数$\hat{x}$使$E|x-\hat{x}|^2$最小。

令$\mathscr{H}_0=(-\infty, \infty)$。由(9)

$$E(x-\hat{x})y=0, \quad y\in\mathscr{H}_0.$$

取$y=1$，得$Ex=E\hat{x}=\hat{x}$。

注意，定理1中$\{x_k, -N\leqslant k\leqslant 0\}$对$x_n$的最优预报值$E(x_n|x_{-N}, \cdots, x_0)$未必属于$\mathscr{H}(N)$。但如$\{x_k, k=0, \pm 1, \cdots\}$为正态序列，则$E(x_n|x_{-N}, \cdots, x_0)\in\mathscr{H}(N)$。这是因为

定理 3 设$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$为$n$维正态向量，$E\xi_k=0$。则

$$E(\xi_n|\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-1} c_k\xi_k.$$

其中c_k是实数。

证明 选取$m(m<n)$个随机变量$e_1, e_2, \cdots, e_m$，满足[1]

(a) 每个e_i为$\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$的线性组合；

(b) $Ee_ie_j=\delta_{ij}$；

(c) 每个$\xi_k(1\leqslant k\leqslant n-1)$为$e_1, \cdots, e_m$的线性组合。

令$\beta_i=E\xi_ne_i$并记

$\mathscr{H}=\{g(\omega): g$为$\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$可测随机变量且$E|g|^2<\infty\}=\{g(\omega): g$为$\sigma(e_1, \cdots, e_m)$可测随机变量且$E|g|^2<\infty\}$，

由于$\left(\xi_n-\sum_{i=1}^{m}\beta_ie_i,\ e_j\right)$为正态向量，又

$$E\left(\xi_n-\sum_{i=1}^{m}\beta_ie_i\right)e_j=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

---

[1] $e_1, e_2, \cdots, e_m$可如下求得：设$\xi_u\neq 0$，$\xi_i=0\ (1\leqslant i<u)$。在$\xi_u, \xi_{u+1}, \cdots, \xi_{n-1}$中，如某$\xi_i=0$或者$\xi_i$可由其前面的变量$\xi_u, \xi_{u+1}, \cdots, \xi_{i-1}$的线性组合表示，则将$\xi_i$去掉。设剩下的$\xi_i$有$m$个，不妨设为$\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_m}$，其中$\xi_{t_1}=\xi_u$。由上述筛选法知$\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_m}$线性无关。定义

$$e_k=\frac{z_k}{(Ez_k^2)^{1/2}},\quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

其中$z_k=\xi_{t_k}-\sum_{i=1}^{k-1} e_iE(e_i\xi_{t_k})$。则$z_k\neq 0$且每一$\xi_{t_k}$可由$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$的线性组合表示，每一$e_k$可由$\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_k}$的线性组合表示。不难证明$Ee_ie_j=\delta_{ij}$。

故$\xi_n - \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i$与$e_j$独立，从而也与$g\in\mathscr{H}$独立。于是对任一$g\in\mathscr{H}$，我们有

$$E|\xi_n - g|^2 = E\left|\left(\xi_n - \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i - g\right)\right|^2$$

$$= E\left|\xi_n - \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\right|^2 + E\left|\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i - g\right|^2$$

$$\geqslant E\left|\xi_n - \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\right|^2. \tag{13}$$

由(13)及定理1上面的注可知，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-1}对ξ_n的最优预报值为

$$E(\xi_n|\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i.$$

因为e_i是ξ_1，…，ξ_{n-1}的线性组合，故定理得证。

例3 考虑$n=2$的情形。设(ξ_1, ξ_2)为均值等于零的正态向量。令$D\xi_i=\sigma_i^2$，则在已知$\xi_1=x_1$下，ξ_2的条件分布密度为

$$f(x_2|x_1)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad -\infty<x_2<\infty,$$

其中

$$m=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}rx_1, \qquad r=\frac{E\xi_2\xi_1}{\sigma_1\sigma_2}, \quad \sigma=\sigma_2\sqrt{1-r^2}.$$

故

$$E(\xi_2|\xi_1=x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f(x_2|x_1)dx_2$$

$$=m$$

$$=\frac{E\xi_1\xi_2}{\sigma_1^2}x_1,$$

换言之

$$E(\xi_2|\xi_1)=\frac{E\xi_1\xi_2}{D\xi_1}\xi_1\text{❶}. \tag{14}$$

关于这方面的进一步论述可参看〔7〕.

§7.6 平稳正态马尔科夫过程

如不声明，本节恒设$\{x_t, -\infty<t<\infty\}$为实平稳过程，$Ex_t=0$且$B(0)\neq 0$。如$\{x_t\}$是正态过程，则强平稳与弱平稳等价。下面考虑平稳正态过程何时成为马氏过程并讨论其简单性质。

定义

$$R(\tau)=\frac{Ex_{t+\tau}x_t}{Ex_t^2}=\frac{B(\tau)}{B(0)}$$

并称$R(\tau)$为$\{x_t\}$的**标准相关函数**。

定理1 设$\{x_t\}$为平稳正态过程，则$\{x_t\}$是马氏过程的充要条件为对任意$\tau_1>0$，$\tau_2>0$有

$$R(\tau_1+\tau_2)=R(\tau_1)R(\tau_2). \tag{1}$$

证明 充分性：设(1)成立。令$s\leqslant t<u$，则

$$E(x_u-R(u-t)x_t)x_s=Ex_ux_s-R(u-t)Ex_tx_s=Ex_t^2[R(u-s)-R(u-t)R(t-s)]=0. \tag{2}$$

可见对任意$t_1<t_2<\cdots<t_n<u$，$\{x_{t_i}, 1\leqslant i\leqslant n\}$对$x_u$的最优线性预报值$\hat{x}_u$为

$$\hat{x}_u=R(u-t_n)x_{t_n}.$$

由于$\{x_t\}$是正态过程，据§7.5定理2，$\hat{x}_u$重合于$\{x_{t_i}, 1\leqslant i\leqslant n\}$，对$x_u$的最优预报值为$E(x_u|x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$。故得

$$\begin{aligned}E(x_u|x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})&=R(u-t_n)x_{t_n}\\&=\frac{Ex_ux_{t_n}}{Ex_{t_n}^2}x_{t_n}\\&=E(x_u|x_{t_n}).\end{aligned}$$

---

❶ 当$n>2$时$E(\xi_n|\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$的具体线性表达式见严士健等著《概率论基础》第331页例7。

最后一个等式是由前节(14)式得到。可见$\{x_t\}$是马氏过程。这里用到如下事实：若$\{x_t\}$是平稳正态过程，则马氏性等价于

$$E(x_u|x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})=E(x_u|x_{t_n}),$$

其中 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<u$。这一事实留作习题。

必要性：设$\{x_t\}$为马氏过程。由§7.5例1知，对任意 $s<t<u$，

$$E(x_u|x_s, x_t)=E(x_u|x_t)=R(u-t)x_t. \qquad (3)$$

以x_s乘上式的两边再取数学期望，得

$$Ex_ux_s=R(u-t)Ex_sx_t,$$

两边除以$B(0)$得

$$R(u-s)=R(u-t)R(t-s),$$

此即(1)式。

对平稳正态马氏过程$\{x_t\}$，由马氏性及(3)也可知，对$u>t$有

$$E(x_u|x_s, s\leqslant t)=E(x_u|x_t)=R(u-t)x_t.$$

换言之，已知全部$\{x_s, s\leqslant t\}$对x_u的最优线性预测值只依赖于最后时刻的观测值x_t。

定理 2 设$\{x_t\}$为平稳正态过程，则$\{x_t\}$是均方连续的马氏过程的充要条件为其相关系数

$$B(\tau)=e^{-a|\tau|}B(0), \quad a\geqslant 0 \text{ 常数}. \qquad (4)$$

对$\{x_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$，则(4)改为

$$B(n)=a^{|n|}B(0), \quad |a|\leqslant 1. \qquad (5)$$

证明 设$\{x_t\}$为均方连续马氏过程。由§7.2性质2知$B(\tau)$为连续函数，从而$R(\tau)$连续且由定理1知$R(\tau)$满足(1)式。由此解得

$$R(\tau)=e^{-a\tau}, \quad a\geqslant 0, \quad \tau\geqslant 0$$

或

$$B(\tau)=e^{-a\tau}B(0).$$

由于$B(-\tau)=B(\tau)$，由上式即得(4)。

反之，设(4)成立。则对任意$\tau_1>0$，$\tau_2>0$，有

$$B(\tau_1+\tau_2)=e^{-\alpha(\tau_1+\tau_2)}\cdot B(0)$$

$$=\frac{B(\tau_1)B(\tau_2)}{B(0)},$$

将上式两边除以$B(0)$得

$$R(\tau_1+\tau_2)=R(\tau_1)R(\tau_2).$$

从而由定理1知$\{x_t\}$为马氏过程. 其次由(4)知$B(\tau)$连续，故$\{x_t\}$均方连续。

对$\{x_n,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots\}$的情形，由(1)得

$$\frac{B(n)}{B(0)}=\left[\frac{B(1)}{B(0)}\right]^n$$

$$=a^n,\quad n\geqslant 0, \tag{6}$$

其中$a=\dfrac{B(1)}{B(0)}$，$|a|=\dfrac{|Ex_1x_0|}{B(0)}\leqslant 1$。由(6)即得

$$B(n)=a^{|n|}B(0),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

反之，如(5)成立，则

$$R(n)=\frac{B(n)}{B(0)}=a^{|n|}. \tag{7}$$

由(7)即知(1)成立，定理证毕。

以下讨论样本函数的性质。

定理3 设$\{x_t\}$为可分平稳正态过程，如存在常数$\varepsilon>0$及$c\geqslant 0$使

$$|B(\tau)-B(0)|\leqslant c|\tau|^{\varepsilon}, \tag{8}$$

则几乎所有的样本函数是连续的。

证明 这是§2.3定理4的直接结果。

定理4 可分均方连续的平稳正态马氏过程其样本函数以概率1连续。

证明 由定理2知，过程的相关函数满足定理3的条件。

最后我们指出

定理5 对任一均方连续的平稳正态马氏过程$\{x_t\}$，有

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} x_s d_s \xrightarrow{L_2} m \quad (t\to\infty),$$

其中$m=Ex_t$。

证明 据§7.4定理2，只需验证

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} K(\tau)d\tau=0$$

即可，其中$K(\tau)=E(x_{t+\tau}-m)(x_t-m)$。

令 $y_t=x_t-m$，则$\{y_t\}$也是均方连续的平稳正态马氏过程，其相关函数$B_y(\tau)=K(\tau)$。故由定理2知

$$K(\tau)=e^{-a|\tau|}K(0),\quad a\geqslant 0。$$

从而

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} K(\tau)d\tau=\frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{-a\tau}K(0)d\tau$$

$$\to 0\ (t\to\infty)。$$

§7.7 强平稳过程

强平稳过程的定义已在§7.2中讨论过了，本节主要研究强平稳过程的保测集变换，大数定理与遍历性等，本节总假设过程是取实值的。

（一）离散参数情形

设$\{x_t,\ t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的强平稳过程，参数集$T=(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$。

（1）保测集变换

在§7.2习题14中，取$s=1$，$t_i=i-1$，$f=I_{B_n}$，其中B_n为n维Borel集，则得

$$P((x_0(\omega),\ \cdots,\ x_{n-1}(\omega))\in B_n)=P((x_1(\omega),\ \cdots,\ x_n(\omega))\in B_n)。\qquad (1)$$

(1)式可如下理解，在$\mathscr{F}(x_n(\omega),\ n\geqslant 0)$的全体有穷维柱集❶

❶ 这里有穷维柱集指形如$[(x_{m_1}(\omega),\ \cdots,\ x_{m_n}(\omega))\in B_n]$，$B_n\in\mathscr{B}_n$的集合。

的集类$\boldsymbol{C}$上定义一个到自身的一步推移变换T，满足条件

$$T((x_0(\omega), \cdots, x_{n-1}(\omega))\in B_n)\doteq((x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega))\in B_n), \tag{2}$$

这里$A\doteq B$表示$P(A\triangle B)=P(A\backslash B)+P(B\backslash A)=0$。(2)式表明，在$\boldsymbol{C}$上$T$保持测度不变。

自然产生下面几个问题：

(A) 既然T已在$\boldsymbol{C}$上有定义，能否合理地扩大它的定义域到全$\mathscr{F}'\{x_n, n\geqslant 0\}$上($\mathscr{F}'$表$\mathscr{F}$关于$P$的完备化$\sigma$代数)?

(B) 平稳过程与保测集变换有何关系?

本节只回答问题(A)，(B)的回答可参看〔1〕第七章。

我们先从保测集变换的定义开始。

取$\mathscr{F}$的子σ代数H，考虑概率空间(Ω, H, P)，P为完备测度。设T为把H中的集变到H中的集变换，如果它满足下列条件，就称T为**保测集变换**。

1° 设A_1是A的象，则A_2也是A的象的充要条件是$P(A_1\triangle A_2)=0$；

2° $P(A)=P(TA)$；

3° $$T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\doteq\bigcup_{n=1}^{\infty} TA_n, \tag{3}$$

$$T(\Omega\backslash A)\doteq\Omega\backslash TA. \tag{4}$$

由3°及集的对偶规则推出

$$T\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\doteq\bigcap_{n=1}^{\infty} TA_n, \tag{5}$$

$$T\Omega=T(A\cup(\Omega\backslash A))\doteq TA\cup T(\Omega\backslash A)\doteq\Omega, \tag{6}$$

$$T\Omega\doteq\Omega,$$

并且如$A_1\subset A_2$，则$TA_1\subset TA_2$(除可能差一零测集外)。

如果每一H可测集B都是某H可测集A在变换T下的象，则可定义逆变换T^{-1}，T^{-1}也是保测集变换，此时称T为可逆保测集

变换。

于是，保测集变换T将σ代数H变为子σ代数TH。利用T可以定义保测集变换

$$T^k=T(T^{k-1})=T^{k-1}(T)\ (k>0,\ T^0=I),$$

如T可逆，则上式中的k可为任意整数。

T以自然的方式派生H中集的示性函数的变换：如$A\to TA$，则定义$I_A\to I_{TA}$。

定理 1 设$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$为强平稳序列，则必存在唯一的保测集变换T，它定义在$\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$上。且对任意$B\in\mathscr{B}_1$及$n\geqslant 0$，有

$$T(x_n\in B)\doteq(x_{n+1}\in B). \tag{7}$$

证 分成几步。

第一步 以$\boldsymbol{C}$表全体柱集

$$[\omega:(x_{n_1},\ \cdots,\ x_{n_k})\in B_k]$$

所成的代数，B_k为k维 Borel 集，$k=1,\ 2,\ \cdots$。定义自$\boldsymbol{C}$到$\boldsymbol{C}$中的集变换T

$$T[(x_{n_1},\ \cdots,\ x_{n_k})\in B_k]\doteq[(x_{n_1+1},\ \cdots,\ x_{n_k+1})\in B_k], \tag{8}$$

则T在$\boldsymbol{C}$上是保距的变换，即

$$P(c_1\triangle c_2)=P(Tc_1\triangle Tc_2). \tag{9}$$

(由附录(一)定理 8 知$P(c_1\triangle c_2)$定义距离$d(c_1,\ c_2)$)。

实际上，设$c_i=((x_{n_1},\ \cdots,\ x_{n_k})\in B_k^{(i)})\ (i=1,\ 2)$。由于任一$m$维柱集可看成$n$维柱集($m\leqslant n$)，故不妨设足标$n_1$，$\cdots$，$n_k$对二柱集是相同的。显然

$$c_i^c=((x_{n_1},\ \cdots,\ x_{n_k})\in(B_k^{(i)})^c),\ (Tc_i\doteq Tc_i)^c, \tag{10}$$

由序列的平稳性

$$\begin{aligned}P(c_1c_2)&=P((x_{n_1},\ \cdots,\ x_{n_k})\in B_k^{(1)}\cap B_k^{(2)})\\&=P((x_{n_1+1},\ \cdots x_{n_k+1})\in B_k^{(1)}\cap B_k^{(2)})\\&=P(Tc_1\cap Tc_2).\end{aligned} \tag{11}$$

由于柱集的补集仍是柱集，故由(10)，(11)，

$$P(c_1\triangle c_2)=P(c_1c_2^c)+P(c_1^cc_2)$$
$$=P(Tc_1\cap(Tc_2)^c)+P((Tc_1)^c\cap Tc_2)$$
$$=P(Tc_1\triangle Tc_2).$$

第二步 扩大T的定义域到全$\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$上。因后者是包含代数$\boldsymbol{C}$的最小σ代数的完备化，由附录(一)定理9知对每一$A\in\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$，必存在$c_m\in\boldsymbol{C}$，使$P(c_m\triangle A)\to 0$，故

$$P(Tc_m\triangle Tc_n)=P(c_m\triangle c_n)\to 0,\ (m,\ n\to\infty).$$

由附录(一)定理8知，存在集$D\in\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$，使$P(Tc_n\triangle D)\to 0\ (n\to\infty)$。我们定义

$$TA\doteq D. \tag{12}$$

注意，D与$\{c_m\}$的选择无关，事实上，设另有一列$\tilde{c}_m\in\boldsymbol{C}$使$P(\tilde{c}_m\triangle A)\to 0$。令$\{\tilde{c}_m\}$所决定的集为$\tilde{D}$。合并$\{c_m\}$，$\{\tilde{c}_m\}$而得一新列$\{\tilde{\tilde{c}}_m\}=\{c_1,\ \tilde{c}_1,\ c_2,\ \tilde{c}_2,\ \cdots\}$，则$P(\tilde{\tilde{c}}_m\triangle A)\to 0$。设$\{\tilde{\tilde{c}}_m\}$所决定的集为$\tilde{\tilde{D}}$，则因$\{c_m\}$，$\{\tilde{c}_m\}$都是$\{\tilde{\tilde{c}}_m\}$的子列而有

$$D\doteq\tilde{D}=\tilde{\tilde{D}}.$$

第三步 下证由(12)定义的T在$\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$上是保测集变换，即要验证1°，2°和3°成立。

1° 由T的定义是显然的。

2° 由(8)及序列的平稳性，已知T在$\boldsymbol{C}$上保测度，故对任意$A\in\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$，有

$$P(TA)=P(D)=\lim_{n\to\infty}P(Tc_n)=\lim_{n\to\infty}P(c_n)=P(A).$$

3° 试证(3)，(4)成立。先证

$$T(A_1\cup A_2)\doteq TA_1\cup TA_2. \tag{13}$$

取$c_n^{(i)}\in\boldsymbol{C}\ (i=1,\ 2)$，使

$$P(A_1\triangle c_n^{(1)})\to 0,\ P(A_2\triangle c_n^{(2)})\to 0\ (n\to\infty).$$

于是

$$P((A_1\cup A_2)\triangle(c_n^{(1)}\cup c_n^{(2)}))\to 0,$$

由此及定义(12)，

$$P(T(A_1\cup A_2)\triangle T(c_n^{(1)}\cup c_n^{(2)}))\longrightarrow 0.$$

易见在柱集所成的集族C上，T满足（13），故

$$P(T(A_1\cup A_2)\triangle(Tc_n^{(1)}\cup Tc_n^{(2)}))\longrightarrow 0. \tag{14}$$

另一方面，由$P(TA_1\triangle Tc_n^{(1)})\longrightarrow 0$，$P(TA_2\triangle Tc_n^{(2)})\longrightarrow 0$得

$$P((TA_1\cup TA_2)\triangle(Tc_n^{(1)}\cup Tc_n^{(2)}))\longrightarrow 0. \tag{15}$$

比较（14），（15）并利用在距离d下极限的唯一性知（13）成立。

由（13）及归纳法得

$$T\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\doteq\bigcup_{i=1}^{n}TA_i. \tag{16}$$

在（8）中取$B_k=R_k$（k维实数空间），得

$$T\Omega\doteq\Omega. \tag{17}$$

由（17），（13）得

$$\Omega\doteq T\Omega=T(A\cup A^c)\doteq TA\cup TA^c.$$

由2°及（16）有

$$\begin{aligned}1&=P(T(A\cup A^c))=P(TA\cup TA^c)\\&=P(TA)+P(TA^c)-P(TATA^c)\\&=P(A)+P(A^c)-P(TATA^c),\end{aligned}$$

故
$$TATA^c\doteq\varnothing,$$

综上得

$$(TA)^c\doteq TA^c,$$

故（4）得证。又因

$$\begin{aligned}(T(A_1A_2))^c&\doteq T(A_1A_2)^c=T(A_1^c\cup A_2^c)\doteq TA_1^c\cup TA_2^c\\&\doteq(TA_1)^c\cup(TA_2)^c=(TA_1\cap TA_2)^c,\end{aligned}$$

得

$$T(A_1A_2)\doteq TA_1\cap TA_2, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}T(A_1\triangle A_2)&=T(A_1A_2^c\cup A_2A_1^c)\doteq TA_1A_2^c\cup TA_2A_1^c\\&\doteq TA_1TA_2^c\cup TA_2TA_1^c=TA_1\triangle TA_2.\end{aligned} \tag{19}$$

现在可以证明（3）。因为$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\triangle\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\to 0(m\to\infty)$，由(16)，(19) 及2°得

$$P\left(T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\triangle\left(\bigcup_{n=1}^{m}TA_n\right)\right)$$

$$=P\left(T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\triangle T\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\right)$$

$$=P\left(T\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\triangle\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\right)\right)$$

$$=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\triangle\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\to 0\,; \tag{20}$$

另一方面，显然有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(TA_n)\triangle\left(\bigcup_{n=1}^{m}TA_n\right)\right)\to 0\,. \tag{21}$$

比较（20)，(21) 即得证（3）。

在（8）中取$k=1$，易见T满足（7）式。综上可见如上定义的T是满足定理要求的。

第四步 唯一性：即要证：由（12）定义的T是满足定理要求的唯一保测集变换。

设若二保测集变换T_1，T_2都满足（7），于是

$$T_i(x_n\in B)\doteq(x_{n+1}\in B),\quad i=1,\ 2.$$

由（5）得

$T_i(x_{n_1}\in B_1,\ \cdots,\ x_{n_m}\in B_m)$

$\doteq(x_{n_1+1}\in B_1,\ \cdots,\ x_{n_m+1}\in B_m)$，

其中 $B_l\in\mathscr{B}_1$，$l=1,\ \cdots,\ m$。再由λ-系方法可见，对每一T_i（8）都成立。这说明T_1，T_2在C上一致。对一般的$A\in\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant 0\}$，取$c_m\in C$，使$P(c_m\triangle A)\to 0$，由$T_i$的保测性，

$$P(T_i c_m \triangle T_i A) \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

由此式及$T_1 c_m \doteq T_2 c_m$，得$T_1 A \doteq T_2 A$。

（Ⅱ）不变σ代数

由附录（一）定理3可见，对任一关于$\mathscr{F}'\{x_n,\ n \geqslant 0\}$可测的$x(\omega)$，必存在无穷维Borel可测函数$f(y_0, \cdots, y_n, \cdots)$，使

$$x(\omega) \doteq f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega), \cdots). \tag{22}$$

这种f可能不唯一。

定义1 称$x(\omega)$关于**强平稳序列**$\{x_n,\ n \geqslant 0\}$**不变的**，若至少存在一个f使（22）及下式

$$\begin{aligned} & f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega), \cdots) \\ & = f(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots, x_{k+n}(\omega), \cdots) \text{ a.e.} \end{aligned} \tag{23}$$

对任意整数k成立。

由该定义可见，如$x(\omega)$不变，则

$$x(\omega) = f(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ a.e.},$$

故它只依赖于序列的尾项$\{x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots\}$，其中$k$为任意非负整数。因此$x(\omega) \in \bigcap_k \mathscr{F}'\{x_n,\ n \geqslant k\}$。

定义2 由关于强平稳序列$\{x_n,\ n \geqslant 0\}$不变的全体$x(\omega)$所产生的σ-代数称为**关于$\{x_n,\ n \geqslant 0\}$的不变σ代数**。

以$\mathscr{U}$记不变σ-代数，显然$\mathscr{U} \subseteq \bigcap_k \mathscr{F}'\{x_n,\ n \geqslant k\}$。$\mathscr{U}$中的集称为**不变集**。

例1 对强平稳序列$\{x_n,\ n \geqslant 0\}$，令$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$，

$$\tilde{x}_1 = \varliminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}, \quad \tilde{x}_2 = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n},$$

$$A = (\omega : \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2),$$

于是$\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$都是不变随机变量，而A为不变集。实际上，只要

证$\tilde{x}_1$不变。

令

$$f(y_0,\ y_1,\ \cdots)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_i,\quad y_i\in R_1,\tag{24}$$

则
$$\tilde{x}_1=f(x_0,\ x_1,\ \cdots).\tag{25}$$

对任意$k\geqslant 0$，有

$$\tilde{x}_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}x_{k+i}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n+k}\sum_{i=0}^{n+k-1}x_i,$$

由（24）有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}x_{k+i}=f(x_k,\ x_{k+1},\ \cdots).\tag{26}$$

由（24），（25）得$\tilde{x}_1$是不变的。同理$\tilde{x}_2$也是，因而$A\in\mathscr{U}$。

（Ⅱ）强大数定理

引理 1 设c_1，c_2，…，c_n为任意实数，令

$$E=(\text{正整数}\ m:m<n;\ c_m<\max_{j>m}c_j),\tag{27}$$

则E由若干组接连的正整数构成；又如以α及β表任一组的首数及尾数，则

$$c_j<c_{\beta+1},\quad \alpha\leqslant j\leqslant\beta.\tag{28}$$

证明 将E中元按大小排列，使小者在前，大者居后，则E自然由若干组（不超过n组）接连的正整数构成。因为$\beta+1\notin E$，故$c_{\beta+1}\geqslant\max\limits_{j>\beta+1}c_j$（或$\beta+1=n$），既然$\beta\in E$，

$$c_\beta<\max_{j>\beta}c_j=c_{\beta+1}.$$

任取k，$\alpha\leqslant k<\beta$。设（28）对$k+1\leqslant j\leqslant\beta$正确，则由$k\in E$，得

$$c_k<\max_{j>k}c_j=\max_{j\geqslant\beta+1}c_j=c_{\beta+1}.$$

例 2 设$(c_1,\ \cdots,\ c_{10})=(7,\ 3,\ 1,\ 6,\ 4,\ 2,\ 5,$

5，1，3)，则$E=(2, 3, 5, 6, 9)$。

引理 2　设强平稳序列$\{x_n, n\geqslant 0\}$对应的保测变换为T，又$E|x_0|<\infty$。于是对任意$A\in\mathscr{F}'\{x_n, n\geqslant 0\}$及$k\geqslant 0$，有

$$\int_{T^kA} x_k P(d\omega)=\int_A x_0 P(d\omega)。\tag{29}$$

证明　令

$$f(y)=y,$$

$$f_n(y)=\sum_{k=-2^{2n}}^{2^{2n}} I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(y)\quad n=1, 2, 3, \cdots.$$

易见，$\lim_{n\to\infty} f_n(y)=f(y)$，且$E|f_n(x_0)-x_0|\to 0$，$E|f_n(x_k)-x_k|\to 0\ (n\to\infty)$。

象通常一样，只要对$I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}$证明

$$\int_{T^kA} I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x_k)P(d\omega)$$

$$=\int_A I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x_0)P(d\omega)。\tag{30}$$

事实上，(30)左方$=P\left(T^kA\cap\left(x_k\in\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right)$。　(31)

由(7)，(5)和(2)，(31)式又等于

$$P\left(T^kA\cap T^k\left(x_0\in\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right)$$

$$=P\left(T^k\left(A\cap\left(x_0\in\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right)\right)$$

$$=P\left(A\cap\left(x_0\in\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right)$$

$$=\int_A I_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x_0)P(d\omega)。$$

引理 3　设$\{x_n, n\geqslant 0\}$是强平稳序列，$E|x_0|<\infty$；又设

β为任一常数，M为不变集，$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} x_i$，则

$$\int_{M\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>\beta\right\}} x_0 P(d\omega)\geqslant \beta\left(\left\{\sup_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>\beta\right\}\cap M\right). \tag{32}$$

证　不妨设$\beta=0$，否则只要换$\{x_n\}$为$\{x_n-\beta\}$，换$\frac{S_n}{n}$为$\frac{S_n}{n}-\beta$。定义ω-集

$$A=\{\sup_{n\geqslant 1} S_n(\omega)>0\},\quad A_j=\{\sup_{1\leqslant n\leqslant j} S_n(\omega)>0\},$$则$A_j\uparrow A$

$(j\to\infty)$。对每个固定的ω，可对S_1，…，S_m用引理1，所得(27)中的集记为$E(\omega)$。固定j，$j<m$，令

$$\begin{aligned}
N_j&=(\omega: j\in E(\omega))=(\omega: S_j<\max_{l>j} S_l)\\
&=(\omega: \max_{j\leqslant k\leqslant m-1}(x_j(\omega)+\cdots+x_k(\omega))>0)\\
&\doteq T^j(\omega: \max_{0\leqslant k\leqslant m-j-1}(x_0(\omega)+\cdots+x_k(\omega))>0)\\
&=T^j A_{m-j}.
\end{aligned} \tag{33}$$

设$E(\omega)$已表为r个相邻整数组$E_i(\omega)$之和，$E_i(\omega)$的首、尾数分别记为α_i，β_i（$i=1$，…，r），则固定ω时

$$\begin{aligned}
\sum_{j:\omega\in N_j} x_j(\omega)&=\sum_{j\in E(\omega)} x_j(\omega)=\sum_{j\in E(\omega)}(s_{j+1}(\omega)-s_j(\omega))\\
&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in E_i(\omega)}(s_{j+1}(\omega)-s_j(\omega))\\
&=\sum_{i=1}^{r}(s_{\beta_i+1}(\omega)-s_{\alpha_i}(\omega))>0
\end{aligned}$$

（见引理1）。因此，如以$I_{N_j}(\omega)$表N_j的示性函数，则

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_{MN_j} x_j P(d\omega) = \sum_{j=0}^{m-1}\int_M I_{N_j}(\omega)x_j(\omega)P(d\omega)$$

$$=\int_M \sum_{j=0}^{m-1} I_{N_j}(\omega)x_j(\omega)P(d\omega)$$

$$=\int_M \sum_{j:\omega\in N_j} x_j(\omega)P(d\omega)\geqslant 0.$$

利用（33）及引理2，并注意$M\in\mathscr{U}$，得

$$0\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}\int_{MT^j\Lambda_{m-j}} x_j P(d\omega)=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{M\Lambda_{m-j}} x_0 P(d\omega)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{M\Lambda_j} x_0 P(d\omega),$$

利用数学分析中事实："$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$如存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}$"，即得

$$\int_{M\Lambda} x_0 P(d\omega)=\lim_{j\to\infty}\int_{M\Lambda_j} x_0 P(d\omega)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{M\Lambda_j} x_0 P(d\omega)\geqslant 0.$$

最后，注意由Λ的定义，可得$\Lambda=\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{s_n(\omega)}{n}>0\right\}$，故得证

（32）对$\beta=0$正确。

定理2 设$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$为强平稳序列，$E|x_0|<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}=E(x_0|\mathscr{U})\ \text{a.e.},\tag{34}$$

又如 $E|x_0|^r<\infty$ $(r\geqslant 1)$，则

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}-E(x_0|\mathscr{U})\right|^r=0. \qquad (35)$$

这里 $\mathscr{U}$ 为该平稳序列的不变 σ-代数。

证 (A) 令 $\tilde{x}_1=\varliminf_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}$，$\tilde{x}_2=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}$，$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}x_i$，由例1知 $\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$ 不变。对实数 $\alpha<\beta$，以 $M_{\alpha\beta}$ 表不变集 $\{\tilde{x}_1(\omega)<\alpha<\beta<\tilde{x}_2(\omega)\}$，显然

$$M_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}\left\{\sup_{n\geqslant 1}\frac{s_n(\omega)}{n}>\beta\right\}.$$

由引理3得

$$\int_{M_{\alpha\beta}} x_0P(d\omega)=\int_{M_{\alpha\beta}\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{s_n(\omega)}{n}>\beta\right\}} x_0P(d\omega)\geqslant\beta P(M_{\alpha\beta}). \qquad (36)$$

应用此结果于 $\{-x_n\}$，换 α，β 为 $-\beta$，$-\alpha$，得

$$\int_{M_{\alpha\beta}}x_0P(d\omega)\leqslant\alpha P(M_{\alpha\beta}). \qquad (37)$$

由 (36)，(37) 得 $P(M_{\alpha\beta})=0$，从而

$$P(\tilde{x}_1(\omega)<\tilde{x}_2(\omega))=P\left(\bigcup_{\alpha<\beta}M_{\alpha\beta}\right)$$

$$\leqslant\sum_{\alpha<\beta}P(M_{\alpha\beta})=0\ (\alpha,\ \beta\text{是有理数}), \qquad (38)$$

故 $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2$ a.e.，因而存在极限 $x(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n(\omega)}{n}$ a.e.，它取有穷值或无穷值。按Fatou引理

$$\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^n|x_i|}{n+1}P(d\omega)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{\sum\limits_{i=0}^n|x_i|}{n+1}P(d\omega)$$

$$=E|x_0|<\infty,$$

故由$|x(\omega)| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i(\omega)|}{n}$，可见$x(\omega)$有穷(a·e·)而且可积。

(B) 今证以概率1，$x(\omega)=E(x_0(\omega)|\mathscr{U})$。因已知$x(\omega)$为$\mathscr{U}$可测，故只要证：对任意$\Lambda \in \mathscr{U}$有

$$\int_{\Lambda} x_0(\omega)P(d\omega)=\int_{\Lambda} x(\omega)P(d\omega). \tag{39}$$

由引理3知，对任一常数α及$M \in \mathscr{U}$有

$$\int_{M\left\{\inf\limits_{n\geqslant 1}\frac{s_n(\omega)}{n}<\alpha\right\}} x_0(\omega)P(d\omega) \leqslant \alpha P\left(\left\{\inf_{n\geqslant 1}\frac{s_n(\omega)}{n}<\alpha\right\}M\right). \tag{40}$$

令

$\Lambda_m=(\omega:(m-1)\varepsilon \leqslant x(\omega)<m\varepsilon) \in \mathscr{U}$，$\varepsilon>0$。

在(32)，(40)中，以$m\varepsilon$，$(m-1)\varepsilon$，$\Lambda\Lambda_m$分别换α，β，M，并注意$\left\{\inf\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{s_n(\omega)}{n}<m\varepsilon\right\} \supset \Lambda_m$，$\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{s_n(\omega)}{n}\geqslant(m-1)\varepsilon\right\}$

$\supset \Lambda_m$，得

$$(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m) \leqslant \int_{\Lambda\Lambda_m} x_0 P(d\omega) \leqslant m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m). \tag{41}$$

其次，根据Λ_m的定义，有

$$(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m) \leqslant \int_{\Lambda\Lambda_m} x P(d\omega) \leqslant m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m).$$

既然已证$P(|x|<\infty)=1$，故$\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} P(\Lambda_m)=1$。将上式对$m=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，…求和，得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)-\varepsilon P(\Lambda)\leqslant\int_{\Lambda} xP(d\omega)$$

$$\leqslant\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)+\varepsilon P(\Lambda),$$

利用（41）

$$\int_{\Lambda} x_0 P(d\omega)-\varepsilon P(\Lambda)\leqslant\int_{\Lambda} xP(d\omega)$$

$$\leqslant\int_{\Lambda} x_0 P(d\omega)+\varepsilon P(\Lambda),$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得证（39）。

（C）因已证得 $\frac{s_n}{n}\to E(x_0|\mathscr{U})$ a.e.，故有 $\frac{s_n}{n}\xrightarrow{P}E(x_0|\mathscr{U})$。由附录（二）定理2，为证（35）式，只需证明 $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$ 一致可积，再由附录（二）定理1这又等价于证明

1° $\sup\limits_n E\left|\frac{s_n}{n}\right|^r<\infty$;

2° $\int_A\left|\frac{s_n}{n}\right|^r P(d\omega)$ 对 A 均匀连续。

由 Minkowski 不等式：$E|Y_1+Y_2|^r\leqslant(E^{1/r}|Y_1|^r+E^{1/r}|Y_2|^r)^r$ $(r\geqslant 1)$，得

$$E\left|\frac{s_{n+1}}{n+1}\right|^r\leqslant\left[\frac{n}{n+1}E^{1/r}\left|\frac{s_n}{n}\right|^r+\frac{1}{n+1}E^{1/r}|x_n|^r\right],$$

因 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 平稳，故 $E^{1/r}|x_n|^r=E^{1/r}|x_0|^r$。由此及上一不等式，用归纳法即得

$$E\left|\frac{s_n}{n}\right|^r\leqslant E|x_0|^r<\infty,$$

此即得证1°。

对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 $c_\varepsilon>0$，使 $c\geqslant c_\varepsilon$ 时，对任意 i，由引理2，并注意 $\{|x_n|^r, n\geqslant 0\}$ 也是强平稳序列，故有

$$\int_{(|x_l|\geqslant c)}|x_l|^r P(d\omega)=\int_{(|x_0|\geqslant c)}|x_0|^r P(d\omega)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，对任意$A\in\mathscr{F}$，若$P(A)<\frac{\varepsilon}{2c^r}$，则

$$\int_A |x_l|^r P(d\omega)=\int_{A(|x_l|\geqslant c)}|x_l|^r P(d\omega)+\int_{A(|x_l|<c)}|x_l|^r P(d\omega)<\frac{\varepsilon}{2}+c^r\cdot\frac{\varepsilon}{2c^r}=\varepsilon.$$

再仿上用 Minkowski 不等式及归纳法，并简记$\int_A xP(d\omega)$ 为$E_A x$，即知对任意$n\geqslant 1$，有

$$E_A\left|\frac{S_{n+1}}{n+1}\right|^r\leqslant\left[\frac{n}{n+1}E_A^{1/r}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r+\frac{1}{n+1}E_A^{1/r}|x_n|^r\right]^r$$

$$<\left[\frac{n}{n+1}\varepsilon^{1/r}+\frac{1}{n+1}\varepsilon^{1/r}\right]^r=\varepsilon,$$

此得证2°。

定理 1 说明，极限$x(\omega)$的值紧密依赖于不变σ-代数$\mathscr{U}$，而$\mathscr{U}$决定于序列的概率结构。

定义 3 称强平稳序列$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$**是遍历的**，如果它的每一不变集的概率或为 0，或为 1。

显然，若$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$遍历，则每一个不变随机变量以概率 1 等于某常数。

Ⅳ 例

例 3 设$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$为独立同分布的随机变量序列，显然它是强平稳序列。根据独立随机变量的 0－1 律，知$\bigcap_k\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant k\}$只含概率为 0 及1的可测集。由前面论述知$\mathscr{U}\subset\bigcap_k\mathscr{F}'\{x_n,\ n\geqslant k\}$中，故此序列具有遍历性。如$E|x_0|<\infty$，则由 (34) 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1}=E(x_0|\mathscr{U})\doteq Ex_0\quad \text{a.e.}\tag{42}$$

例 4 设强平稳序列$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$满足条件$Ex_0^2<\infty$，因此，对任意正整数τ，$E|x_{n+\tau}x_n|<\infty$。在§7.2习题15中。取$T=\{0,1,2,3,\cdots\}$，s为非负整数τ，$\phi=y_0y_\tau$，即知$\{x_{n+\tau}x_n,\ n\geqslant 0\}$也是强平稳序列，从而由定理2，存在有穷极限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}x_{n+\tau}x_n\qquad \text{a.e.}\tag{43}$$

如果$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$遍历，则$\{x_{n+\tau}x_n,\ n\geqslant 0\}$也遍历，于是上述极限几乎处处等于$B(\tau)=Ex_{n+\tau}x_n$。由定理2的第二个结论知$B(\tau)$还满足

$$\lim_{m\to\infty}E\left|\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}x_{n+\tau}x_n-B(\tau)\right|=0。\tag{44}$$

在这个例子中，$\{x_n,\ n\geqslant 0\}$既是强平稳过程也是弱平稳过程。由§7.4同样可得证$\frac{1}{n+1}\sum\limits_{n=0}^{m}x_{n+\tau}x_n$的均方收敛性。但难于得到它的几乎处处收敛性。

（二）连续参数情形

在（一）中已详细讨论了当参数集为全体非负整数的情形，如果参数集$T=[0,\infty)$，理论基本上类似。因此，我们只着重叙述不同之处。

定义 4 设T_t，$t\geqslant 0$是完备概率空间(Ω,H,P)上的一簇保测集变换，称它是**保测集变换半群**，如果对任意固定的s，$t\geqslant 0$，T_t满足下列条件：对任一集$A\in H$，有

1° $T_{s+t}A\doteq T_sT_tA\doteq T_tT_sA$，$T_0A\doteq A\ (s,t\geqslant 0)$。 (45)

定理 3 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$是任一强平稳过程，则必存在唯一的保测变换半群$\{T_t,\ t\geqslant 0\}$，它定义在$\mathscr{F}'\{x_t,\ t\geqslant 0\}$上，对

任意 $\tau \geqslant 0$，满足

$$T_\tau(x_s \in B) \doteq (x_{s+\tau} \in B), \tag{46}$$

其中 $B \in \mathscr{B}_1$。

证明 对任一非负数 τ，仿照定理 1 的证明可证，在 $\mathscr{F}'\{x_t, t \geqslant 0\}$ 上存在满足（46）的唯一保测集变换 T_τ，使对任意 $B_k \in \mathscr{B}_k$，有

$$T_\tau[(x_{t_1}, \cdots, x_{t_k}) \in B_k] \doteq [(x_{\tau+t_1}, \cdots, x_{\tau+t_k}) \in B_k]. \tag{47}$$

易证如是得来的一族保测集变换 $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ 满足（45）。实际上，易见二保测集变换的积 T_sT_t 及 T_tT_s 也是保测集变换。既然 T_{s+t}，T_sT_t，T_tT_s 由于（47）在全体有穷维柱集上重合，仿定理 1 证明中的第四步便知，它们在 $\mathscr{F}'\{x_t, t \geqslant 0\}$ 上重合。命题得证。

由附录（一）定理 3，对任一关于 $\mathscr{F}'\{x_t, t \geqslant 0\}$ 可测的 $x(\omega)$，必存在 $t_i \in T$，$i = 1, 2, \cdots$，使

$$x(\omega) = f(x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots) \text{ a.e.}, \tag{48}$$

其中 $f(x_1, x_2, \cdots)$，$x_i \in R_1$ 为某一 $\mathscr{B}^\infty = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1 \times \cdots$ 可测函数。设 $\{T_t, t \geqslant 0\}$ 是由强平稳过程 $\{x_t, t > 0\}$ 所产生的保测集变换半群。称 $x(\omega)$ 关于 T_τ 不变，若至少存在一列 $t_i \in T$，$i = 1, 2, \cdots$，及一个 f 使（48）及下式

$$f(x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots, x_{t_n}(\omega), \cdots)$$
$$= f(x_{k\tau+t_1}(\omega), x_{k\tau+t_2}(\omega), \cdots, x_{k\tau+t_n}(\omega), \cdots) \text{ a.e.}$$

对任意整数 k 成立。

由关于 T_τ 不变的 $x(\omega)$ 全体所产生的 σ-代数称为**关于 T_τ 不变的 σ-代数**，记为 $\mathscr{U}_\tau$。令 $\mathscr{U} = \bigcap\limits_{\tau > 0} \mathscr{U}_\tau$，$\mathscr{U}$ 也是 σ-代数，显然，$\mathscr{U} \subseteq \bigcap\limits_{t} \mathscr{F}'\{x_s, s \geqslant t\}$。

定义 5 设 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 是强平稳过程，$\{T_t, t \geqslant 0\}$ 是所对应的保测集变换半群。$\mathscr{U}_\tau$ 是关于 T_τ 不变的 σ-代数。称 σ-代

数$\mathscr{U}=\bigcap\limits_{\tau>0}\mathscr{U}_\tau$为关于强平稳过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$不变的σ-代数。或为关于$\{T_t,\ t\geqslant 0\}$不变的σ代数。

$\mathscr{U}$中的集称为关于此过程的不变集。或称为关于$\{T_t, t\geqslant 0\}$的不变集。同样地，关于$\mathscr{U}$可测的随机变量称为关于$\{T_t, t\geqslant 0\}$的不变随机变量。

引理 4 设强平稳过程$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$对应的保测变换半群为$\{T_t,\ t\geqslant 0\}$，又$E|x_0|<\infty$。于是对任意$A\in\mathscr{F}'\{x_t,\ t\geqslant 0\}$及$s\geqslant 0$，有

$$\int_{T_sA} x_s P(d\omega)=\int_A x_0 P(d\omega).$$

该引理的证明与引理2完全一样，故从略。

定理 4 设$\{x_t,\ t\geqslant 0\}$为Borel可测的平稳过程，$E|x_0|<\infty$，$\mathscr{U}$为此过程不变的σ-代数，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds=E(x_0|\mathscr{U})\ \ \text{a.e.}, \tag{49}$$

如又设$E\{|x_0|^r\}<\infty\ (r\geqslant 1)$，则

$$\lim_{t\to\infty} E\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds-E(x_0|\mathscr{U})\right|^r=0. \tag{50}$$

证 由过程的Borel可测性可知，一切样本函数$x_t(\omega)$是$\mathscr{B}_1$可测的。对任意正数$\tau>0$，定义

$$\hat{x}_m(\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau} x_s(\omega)ds,\quad \hat{y}_m(\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau}|x_s(\omega)|ds.$$

根据Fubini定理

$$\int_\Omega \hat{y}_m(\omega)P(d\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau} E|x_s(\omega)|ds=\tau E|x_0|,$$

可见$\hat{x}_m(\omega)$，$\hat{y}_m(\omega)$都有意义而且是随机变量。今证$\{\hat{x}_m,\ m\geqslant 0\}$是平稳序列。

注意$\int_0^\tau x_s(\omega)ds$为$\mathscr{F}\{x_s,\ 0\leqslant s\leqslant\tau\}$可测，故存在无穷维Borel可测函数$f(y_0,\ y_1,\ \cdots)$及点列$\{s_i\}\subset[0,\ \tau]$，使

$$\hat{x}_0(\omega)=\int_0^\tau x_s(\omega)ds=f(x_{s_0},\ x_{s_1},\ \cdots)\ \text{a.e.},$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_m(\omega)&=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau} x_s(\omega)ds=\int_0^\tau x_{m\tau+s}(\omega)ds\\&=f(x_{m\tau+s_0},\ x_{m\tau+s_1},\ \cdots)\quad \text{a.e.},\end{aligned}\tag{51}$$

由§7.2习题15知，$\{\hat{x}_m,\ m\geqslant 0\}$为平稳序列。同样可证$\{\hat{y}_m,\ m\geqslant 0\}$也是平稳序列。

以下取$\tau=1$，由定理2知极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\hat{x}_m(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n x_s(\omega)ds\tag{52}$$

以概率1存在、有穷，而且可积。对$\{\hat{y}_m,\ m\geqslant 0\}$当然也如此，因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{y}_n(\omega)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_n^{n+1}|x_s(\omega)|ds=0.\tag{53}$$

以$[t]$表不超过t的最大整数，则

$$\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds=\frac{1}{[t]}\left\{\int_0^{[t]}x_s(\omega)ds\right\}\frac{[t]}{t}+\varepsilon_t,\tag{54}$$

其中　ε_t由于（53）以概率1满足

$$|\varepsilon_t|=\left|\frac{1}{t}\int_{[t]}^t x_s(\omega)ds\right|\leqslant\frac{1}{[t]}\int_{[t]}^{[t]+1}|x_s(\omega)|ds\to 0\quad(t\to\infty).\tag{55}$$

由（54），（52）及（55）可见（49）中极限以概率1存在、有穷，而且可积．试证它关于$\mathscr{U}$可测，为证此，只要证明该极限对任意$u\geqslant 0$关于T_u不变。

因$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds\in\mathscr{F}'\{x_u,\ u\geqslant 0\}$，故存在无穷维

Borel可测函数 $f(y_0, y_1, \cdots)$ 及点列 $\{s_i\}\in T$，使

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds=f(x_{s_0}, x_{s_1}, \cdots) \quad \text{a.e.}. \tag{56}$$

对任意非负整数 k 有

$$f(x_{k\tau+s_0}, x_{k\tau+s_1}, \cdots)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_{k\tau+s}(\omega)ds$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[\int_0^t x_s(\omega)ds+\int_t^{t+k\tau} x_s(\omega)ds-\int_0^{k\tau} x_s(\omega)ds\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds \quad \text{a.e.}. \tag{57}$$

比较（56）与（57）可见 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds$ 关于 T_τ 不变，由 τ 的任意性即得所欲证的。

为完成（49）的证明，只要证对任意 $\Lambda\in\mathscr{U}$，有

$$\int_\Lambda x_0P(d\omega)=\int_\Lambda xP(d\omega), \tag{58}$$

这里 $x(\omega)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds$。而为证明（58），又只要证明

$$\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds \tag{59}$$

作为 ω 的函数是一致可积的。实际上，由一致可积性可在积分号下取极限，故对任意 $\Lambda\in\mathscr{U}$，

$$\int_\Lambda x_0P(d\omega)=\frac{1}{t}\int_0^t ds\left[\int_{T_s\Lambda}x_sP(d\omega)\right]$$

$$=\int_\Lambda\left[\frac{1}{t}\int_0^t x_sds\right]P(d\omega)$$

$$\longrightarrow\int_\Lambda xP(d\omega)\ (t\to\infty),$$

此即（58）。

现在来证明更强的结论。即如$E\{|x_0|^r\}<\infty$，那么不仅(59)中积分一致可积，而且它的r次方（$r\geqslant 1$）也一致可积。这只需证明

1° $\sup\limits_t E\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right|^r <\infty$，

2° $\int_M \left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right|^r P(d\omega)$ 对M均匀连续。

沿用定理2的证明，对任给的$\varepsilon_1>0$，存在ε_2，使

$$\int_M |x_t|^r P(d\omega)<\varepsilon_1,$$

只要$P(M)<\varepsilon_2$（$t\geqslant 0$）。其次，如$P(M)<\varepsilon_2$，则

$$\begin{aligned}&\int_M \left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right|^r P(d\omega)\\ &\leqslant\int_M \left\{\frac{1}{t}\int_0^t |x_s|^r ds\right\}P(d\omega)<\varepsilon_1.\end{aligned} \tag{60}$$

此即得证2°。在（60）中取$M=\Omega$，右方即化为$E|x_0|^r$，故得证1°。

最后，因$\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right|^r$一致可积，因此可在符号$E$下取极限，得到

$$\lim_{t\to\infty} E\left\{\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds-E(x_0|\mathscr{U})\right|^r\right\}=0,$$

此即证明了（50）。

当$\mathscr{U}$只含概率为0或1的集时，称此过程是遍历的。

参数集$T=(\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$或$T=(-\infty,+\infty)$时，也有相应的结论。可参看〔1〕。

习　题

1. 设$\{x_t,t\geqslant 0\}$是齐次马氏过程，相空间为$(R_1,\mathscr{B}_1)$、转移概率是

$p(t; x, A)$。设在$\mathscr{B}_1$上存在概率测度$q(A)$，满足条件

$$q(A)=\int_{R_1}p(t; x, A)\,q(dx)。$$

如$\{x_t, t\geqslant 0\}$以q为开始分布，即$P(x_0\in A)=q(A)$，$A\in\mathscr{B}_1$。那么它是强平稳过程。

2. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为强平稳过程，且是一个马氏过程。求证：如$x(\omega)$为不变随机变量，则它关于$\mathscr{F}'\{x_1\}$可测。$\mathscr{U}$与$\mathscr{F}'\{x_0\}$相等吗？

提示 设A是不变集，令$Z=I_A$。证明

$$Z=E(Z|x_0)\qquad a.e.。$$

上式可利用鞅收敛定理及Z的不变性推得。

3. $\{x_n, n\geqslant 0\}$是齐次马尔科夫链，状态空间$E=\{0, 1, 2, \cdots\}$且一切状态构成一个不可分的遍历类。设该链的初始分布为$\pi(i)$，$i\in E$。又$f(i)$，$i\in E$是有界函数。

1° 求证：关于P_π下述极限几乎处处存在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\quad a.e.;$$

2° 试求此极限(设该链转移概率极限为q_i, $i\in E$)。

4. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$是齐次马尔科夫链，状态空间$E=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，初始分布为$\pi(i)$，$i\in E$。当相空间E的分解具有什么形式时问题3中的极限存在？

5. 设$\{x_n, n\geqslant 0\}$为有穷齐次马尔科夫链，$f(i)$，$i\in E$是定义在状态空间E上的有界函数。试证，无论开始分布如何，以概率1存在有穷极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k)$；它也是$\delta(\geqslant 1)$次方收敛意义下的极限。

6. 设$\{x_t, t\geqslant 0\}$为强平稳过程，$a_k, s_k, k=1, \cdots, n$是常数且$s_k\geqslant 0$，则过程

$$y_t=\sum_{k=1}^{n}a_kx_{t+s_k}$$

也是强平稳过程，试问两者的遍历性间有何关系？

7. 试举出强大数定理成立，但过程本身并不遍历的强平稳过程。

附 录 (一)

(一) 单调类定理

单调类定理分集合的形式与函数的形式，分述如下。

集合的形式：

定义 1 设Ω为一集合，称Ω的子集系Π为π-系，如对任意A，$B\in\Pi$有$AB\in\Pi$。

定义 2 设Ω为一集合，称Ω的子集系Λ为λ-系，如Λ满足

(i) $\Omega\in\Lambda$；

(ii) 如A，$B\in\Lambda$且$A\subset B$，则$B-A\in\Lambda$；

(iii) 如$A_n\in\Lambda$且$A_n\uparrow A$，则$A\in\Lambda$。

显然σ代数既是π-系又是λ-系。反之，如$\mathscr{F}$是π-系又是λ-系，则$\mathscr{F}$是σ代数。实际上，设$A_i\in\mathscr{F}$，由(i)，(ii)知$A_i^c\in\mathscr{F}$。由De Morgan定律

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\in\mathscr{F},$$

可见$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\in\mathscr{F}$。从而由(iii)得$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathscr{F}$。

设$\mathscr{F}$及$\mathscr{G}$为Ω的两个子集系，我们有

定理 1 如$\mathscr{F}$为λ-系，$\mathscr{G}$为π-系且$\mathscr{F}\supset\mathscr{G}$，则$\mathscr{F}\supset\sigma(\mathscr{G})$。

证明 所有包含$\mathscr{G}$的λ-系之交集$\mathscr{F}'$仍是λ-系，如能证$\mathscr{F}'$也成π-系，由上知$\mathscr{F}'$是σ代数，从而$\sigma(\mathscr{G})\subset\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$。

令

$\mathscr{F}_1=\{A$：对一切$B\in\mathscr{G}$有$AB\in\mathscr{F}'\}$。

易见$\mathscr{F}_1$为λ-系。又因$\mathscr{F}_1\supset\mathscr{G}$，故$\mathscr{F}_1\supset\mathscr{F}'$，这表示当$A\in\mathscr{F}'$，

$B\in\mathscr{G}$有$AB\in\mathscr{F}'$。令

$$\mathscr{F}_2=\{B: 对一切A\in\mathscr{F}'有AB\in\mathscr{F}'\},$$

则$\mathscr{F}_2$为λ-系且$\mathscr{F}_2\supset\mathscr{G}$，故$\mathscr{F}_2\supset\mathscr{F}'$。这表示如$A$，$B\in\mathscr{F}'$，则$AB\in\mathscr{F}'$。换言之$\mathscr{F}'$为π-系。

定理1指出一种欲证某集系$\mathscr{A}$具有某性质$\mathscr{P}$的方法。此法先令满足性质$\mathscr{P}$的一切集所成的集系为Λ，证明Λ为λ-系且Λ包含$\mathscr{A}$的某子集系Π，而Π为π-系且$\sigma(\Pi)\supseteq\mathscr{A}$，则可得出$\mathscr{A}\subseteq\Lambda$。我们称这种方法为**λ-系方法**。

定义3　称Ω的子集系$\mathscr{H}$为单调类，如果$A_n\in\mathscr{H}$且$A_n\uparrow A$或者$A_n\downarrow A$，都有$A\in\mathscr{H}$。

定理1′　如单调类$\mathscr{H}\supset\mathscr{G}$，则$\mathscr{H}\supset\sigma(\mathscr{G})$。其中$\mathscr{G}$为任一子集系。

证明　所有包含$\mathscr{G}$的单调类之交仍是单调类，记此集为$\mathscr{H}'$。用证明定理1的类似方法可证，$\mathscr{H}'$为π-系。令

$$\mathscr{C}=\{A: A\in\mathscr{H}',\ A^c\in\mathscr{H}'\},$$

则$\mathscr{C}$为单调类且$\mathscr{C}\supset\mathscr{G}$，故$\mathscr{C}=\mathscr{H}'$。从而$\mathscr{H}'$为代数，因此$\mathscr{H}'$为σ代数。故得

$$\sigma(\mathscr{G})\subset\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}.$$

函数的形式：

令$\mathscr{L}$为定义在Ω上的一族函数且满足条件：如$\xi(\omega)\in\mathscr{L}$，则$\xi^+(\omega)\in\mathscr{L}$及$\xi^-(\omega)\in\mathscr{L}$。其中

$$\xi^+(\omega)=\begin{cases}\xi(\omega), & 如\ \xi(\omega)\geqslant 0,\\ 0, & 如\ \xi(\omega)<0;\end{cases}$$

$$\xi^-(\omega)=\begin{cases}0, & 如\ \xi(\omega)\geqslant 0,\\ -\xi(\omega), & 如\ \xi(\omega)<0.\end{cases}$$

定义4　设L为定义在Ω上的一函数集，称L为$\mathscr{L}$-系，如它满足下列条件：

(i)　$1\in L$；

(ii) L中任意二函数的线性组合仍属于L，

(iii) 如$\xi_n \in L$，$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$且$\xi$有界或者$\xi \in \mathscr{L}$，则$\xi \in L$。

定理 2 设L为$\mathscr{L}$-系，Π为π-系。如对任一$A \in \Pi$有$I_A \in L$，则L包含一切属于$\mathscr{L}$中关于$\sigma(\Pi)$可测的函数。

证明 令

$$\mathscr{F} = \{A: A \subset \Omega \text{且} I_A \in L\},$$

则$\mathscr{F}$为λ-系。又因$\mathscr{F} \supset \Pi$，故由定理 1 知$\mathscr{F} \supset \sigma(\Pi)$。换言之，对一切$A \in \sigma(\Pi)$有$I_A \in L$。

今设ξ为非负$\sigma(\Pi)$可测函数且$\xi \in \mathscr{L}$。定义

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} I\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{2^n}\right),$$

则$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$。又因$\left(\frac{k}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{2^n}\right) \in \sigma(\Pi)$，由上所证可知$\xi_n \in L$，故得$\xi \in L$。

根据$\mathscr{L}$的定义，对任一$\sigma(\Pi)$可测函数$\eta \in \mathscr{L}$，可表示为$\eta = \eta^+ - \eta^-$，其中η^+，$\eta^- \in \mathscr{L}$。刚才已证η^+，$\eta^- \in L$，但L为线性空间，故$\eta \in L$。

定理 2 指出一种欲证某函数集合$\mathscr{C}$具有某种性质$\mathscr{P}$的方法。此法先引进适当的函数族$\mathscr{L}$（要满足如$\xi \in \mathscr{L}$则ξ^+，$\xi^- \in \mathscr{L}$）。令满足性质$\mathscr{P}$的一切函数所成的集为L，证明L为$\mathscr{L}$-系。此外引入一π-系Π，使$\mathscr{C}$中的函数为$\sigma(\Pi)$可测。于是如对一切$A \in \Pi$有$I_A \in L$，则可得知$\mathscr{C} \subseteq L$。我们称这种方法为$\mathscr{L}$-系方法。

（二）测度论的其它定理

下面应用$\mathscr{L}$-系法证明一些定理。

定理 3 设$\{x_t, t \in T\}$为定义在Ω上而取值于可测空间$(E, \mathscr{B})$的一族抽象函数，则$\xi(\omega)$，$\omega \in \Omega$为$\sigma(x_t, t \in T)$

可测的充要条件为：存在$t_i \in T$，$i=1,2,\cdots$，使ξ可表示成

$$\xi(\omega)=f(x_{t_1}(\omega),\ x_{t_2}(\omega),\ \cdots), \tag{1}$$

其中$f(x_1, x_2, \cdots)$，$x_i \in E$为某一$\mathscr{B}^{\infty}=\mathscr{B}\times\mathscr{B}\times\cdots$可测函数。

证明 必要性：因每一x_t为$\sigma(x_t, t\in T)$可测，故

$$\alpha(\omega)=(x_{t_1}(\omega),\ x_{t_2}(\omega),\ \cdots)$$

为$(\Omega, \sigma(x_t, t\in T))\to(E^{\infty}, \mathscr{B}^{\infty})$的可测变换。从而$f(\alpha(\omega))=f(x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots)$为$(\Omega, \sigma(x_t, t\in T))\longrightarrow(R_1, \mathscr{B}_1)$的可测函数。

充分性：令

$\mathscr{L}=\{$全体定义在Ω上的函数$\xi(\omega)\}$，

$L=\{$所有可表示成（1）形的函数$\xi(\omega)\}$，

$\Pi=\{(x_{t_1}\in\Gamma_1, \cdots, x_{t_n}\in\Gamma_n): \Gamma_i\in\mathscr{B}, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 0, t_i\in T\}$。

易见Π为π-系且$\sigma(\Pi)=\sigma(x_t, t\in T)$。易证$L$为$\mathscr{L}$-系。又因对$\Pi$的任一元素$(x_{t_i}\in\Gamma_i, 1\leqslant i\leqslant n)$的示性函数

$$I_{(x_{t_i}\in\Gamma_i, 1\leqslant i\leqslant n)}(\omega)=I_{\Gamma_1}(x_{t_1}(\omega))\cdots I_{\Gamma_n}(x_{t_n}(\omega))$$

满足（1）式，故上式左方属于L。从而由定理2知L包含$\mathscr{L}$中一切$\sigma(\Pi)$可测的函数。

定理4 设$(U_i, \mathscr{F}_i)$，$i=1, 2, 3$为三个可测空间。$f(x_1, x_3)$，$x_1\in U_1$，$x_3\in U_3$为$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$可测函数。又设$P(x_2, \Gamma)$，$x_2\in U_2$，$\Gamma\in\mathscr{F}_3$，当固定$x_2$时为$\mathscr{F}_3$上的测度，当固定$\Gamma$时为$\mathscr{F}_2$可测函数。如果对一切$x_1\in U_1$，$x_2\in U_2$，积分

$$g(x_1, x_2)=\int_{U_3} f(x_1, x_3)P(x_2, dx_3) \tag{2}$$

有限，则$g(x_1, x_2)$为$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$可测函数。

证明 令

$\mathscr{L}=\{f(x_1, x_3): f$为$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$可测，且对一切$x_1\in U_1$，$x_2$

$\in U_2$，f使（2）定义的$g(x_1, x_2)$有限}，

$L=\{f(x_1, x_3): f$使$g(x_1, x_2)$为$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$可测$\}$，

$\Pi=\{A_1\times A_3: A_1\in\mathscr{F}_1, A_3\in\mathscr{F}_3\}$，

则Π为π-系且$\sigma(\Pi)=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$。由积分的单调收敛定理可知，$L$为$\mathscr{L}$-系。又因对任意$A_1\times A_3\in\Pi$，有

$$I_{A_1\times A_3}(x_1, x_3)\in L,$$

故据定理2，L包含一切$\mathscr{L}$中关于$\sigma(\Pi)$可测的函数。

特别，当f为一元函数时，由定理4知

$$g(x_2)=\int_{U_3}f(x_3)P(x_2, dx_3)$$

为$\mathscr{F}_2$可测函数。

定理5 设$(E, \mathscr{B})$为距离可测空间，其中$\mathscr{B}$为包含E中全体开集的最小σ代数。令$\mathscr{H}$为定义在E上的一些函数所成的集合，如果

（i）$\mathscr{H}$为$\mathscr{L}$-系；

(ii) $\mathscr{H}$包含一切有界连续函数，

则$\mathscr{H}$包含$\mathscr{L}$中一切$\mathscr{B}$可测函数。

证明 利用$\mathscr{L}$-系法，只需证明对任一开集A有$I_A\in\mathscr{H}$。

令$f(x)$，$x\in E$为连续函数，满足$f(x)=0$如$x\notin A$，$f(x)\neq 0$如$x\in A$（例如取$f(x)=\inf\limits_{y\in A^c}\rho(x, y)$，其中$\rho$为$E$上的距离），定义

$$g_n(y)=\begin{cases}1, & 如|y|\geqslant\frac{1}{n},\\ n|y|, & 如|y|<\frac{1}{n},\end{cases}$$

则$g_n(y)\uparrow I_{\{0\}^c}(y)$且

$$0\leqslant f_n(x)=g_n[f(x)]\uparrow I_A(x). \tag{3}$$

因g_n及f连续，故f_n连续、有界。据假设$f_n\in\mathscr{H}$，故由（3）并注意$\mathscr{H}$是$\mathscr{L}$-系知$I_A\in\mathscr{H}$。

定理 6 设 $(X, \mathscr{F})$ 及 $(Y, \mathscr{G})$ 为可测空间，μ 为 $\mathscr{F}$ 上的有限广义测度；$\nu(x, B)$，$x \in X$，$B \in \mathscr{G}$，当固定 x 时为 $\mathscr{G}$ 上的有限广义测度，当固定 B 时为 $\mathscr{F}$ 可测函数且满足

$$\sup_{x \in X, B \in \mathscr{G}} |\nu(x, B)| < c \text{（常数）}, \tag{4}$$

则对任意有界 $\mathscr{G}$ 可测函数 $f(y)$，$y \in Y$，有

$$\int_X \mu(dx)\left\{\int_Y f(y)\nu(x, dy)\right\}$$
$$= \int_Y f(y)\left\{\int_X \nu(x, dy)\mu(dx)\right\}. \tag{5}$$

证明 令

$$\mathscr{L} = \{\text{全体有界 } \mathscr{G} \text{ 可测函数 } f(y)\},$$
$$L = \{f(y): f \text{ 使（5）成立}\},$$

则 L 是 $\mathscr{L}$-系。由 $\mathscr{L}$-系法只需证明对任一 $B \in \mathscr{G}$ 有 $I_B \in L$ 即可。为此令 $f = I_B$，（5）的左方等于

$$\int_X \mu(dx)\nu(x, B) \triangleq \lambda(B),$$

（5）的右方等于

$$\int_Y f(y)\lambda(dy) = \int_B \lambda(dy) = \lambda(B),$$

可见 $I_B \in L$。

最后我们证明一个定理。

定理 7 设 P_n 及 P 为可测空间 $(E, \mathscr{B})$ 上的有限测度，且对一切 $B \in \mathscr{B}$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(B) = P(B)$。则对任一有界 $\mathscr{B}$ 可测函数 $f(x)$，$x \in E$，有

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f(x)P_n(dx) = \int_E f(x)P(dx). \tag{6}$$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$，因 f 有界，故存在有界简单函数 $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j I_{A_j}(x)$，$A_j \in \mathscr{B}$，使得对一切 $x \in E$ 有

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

于是在下式中先令 $n\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\left|\int_E f(x)P_n(dx)-\int_E f(x)P(dx)\right|$$

$$\leqslant\int_E|f-g|P(dx)+\left|\int_E gP(dx)-\int_E gP_n(dx)\right|$$

$$+\int_E|g-f|P_n(dx)$$

$$\leqslant\varepsilon P(E)+c\sum_{j=1}^{m}|P(A_j)-P_n(A_j)|+\varepsilon P_n(E)\to 0,$$

其中 c 是常数。

（三）由概率产生的距离

定理 8 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，对 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，定义 A，B 的距离为

$$d(A,B)=P(A\triangle B),$$

则 $\mathscr{F}$ 成为完备的距离空间（其中集 A,B 如满足 $P(A\triangle B)=0$，则看成同一点）．

证明 因 $A\triangle B=AB^c\cup BA^c$，显然

$$P(A\triangle B)=P(B\triangle A)\geqslant 0;$$

又由 $A\triangle B\subset(A\triangle C)\cup(B\triangle C)$，得

$$P(A\triangle B)\leqslant P(A\triangle C)+P(B\triangle C).$$

因而 $\mathscr{F}$ 是一距离空间．为证完备性，设有一列 $A_n\in\mathscr{F}$，使 $P(A_n\triangle A_m)\to 0$（$n\to\infty$，$m\to\infty$），则必存在一列正整数 N_k，$N_1<N_2<\cdots$，使当 $m\geqslant N_k$，$n\geqslant N_k$ 时，

$$P(A_n\triangle A_m)<1/2^k.$$

令 $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_{N_k}$，因此 $A^c=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_{N_k}^c=\lim_{j\to\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_{N_k}^c$。对任意正整数 s，有

$$A_{N_s}A^c \subset A_{N_s}A^c_{N_{s+1}} \cup A_{N_{s+1}}A^c_{N_{s+2}} \cup \cdots,$$

故 $P(A_{N_s}A^c) \leqslant \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{s+r}} = \frac{1}{2^{s-1}}$，类似地，由

$$A^c_{N_s}A \subset A^c_{N_s}A_{N_{s+1}} \cup A^c_{N_{s+1}}A_{N_{s+2}} \cup \cdots,$$

得 $P(A^c_{N_s}A) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}$，于是 $P(A_{N_s} \triangle A) \leqslant \frac{1}{2^{s-2}}$。最后得：当 $n > N_s$ 时

$$P(A_n \triangle A) \leqslant P(A_n \triangle A_{N_s}) + P(A_{N_s} \triangle A)$$
$$\leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-2}}.$$

由此可见 $\lim_{n\to\infty} P(A_n \triangle A) = 0$，这说明在上述距离 d 下，$\{A_n\}$ 有极限为 A。为证唯一性，设有两极限为 A 与 B，则

$$P(A \triangle B) \leqslant P(A_n \triangle A) + P(A_n \triangle B) \to 0 \ (n \to \infty).$$

定理 9 设 R 为代数，含 R 的最小 σ 代数 $\mathscr{F}\{R\}$ 关于有穷测度 P 的完备化 σ-代数记为 $\widetilde{\mathscr{F}}\{R\}$，则

（i）对任意 $B \in \widetilde{\mathscr{F}}\{R\}$ 及 $\varepsilon > 0$，必存在 $B_\varepsilon \in R$，使 $P(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$；

（ii）对任意 $\widetilde{\mathscr{F}}\{R\}$ 可测函数 $f(\omega)$ 及 $\varepsilon > 0$，必存在 R 可测的简单函数 $f_\varepsilon(\omega)$，使

$$P(|f(\omega) - f_\varepsilon(\omega)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

（证明省略）。

附 录 (二)

设$\mathscr{H}$为定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的一族可积的随机变量，称$\mathscr{H}$为**一致可积**，如果

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{(|x|\geqslant\lambda)}|x|P(d\omega)=0 \tag{1}$$

对$x\in\mathscr{H}$一致成立。

定理 1 $\mathscr{H}$一致可积当且仅当

（a）$\sup\limits_{x\in\mathscr{H}}E|x|<\infty$；

（b）任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对一切满足$P(A)<\delta$的$A\in\mathscr{F}$，有

$$\int_A|x|P(d\omega)<\varepsilon,\quad x\in\mathscr{H}.$$

证明 必要性：对$A\in\mathscr{F}$，成立

$$\int_A|x|P(d\omega)\leqslant\lambda P(A)+\int_{(|x|\geqslant\lambda)}|x|P(d\omega). \tag{2}$$

如$\mathscr{H}$一致可积，由（1）取充分大的λ，使

$$\int_{(|x|\geqslant\lambda)}|x|P(d\omega)<\varepsilon/2,\quad x\in\mathscr{H}. \tag{3}$$

在（2）中，令$A=\Omega$并注意（3）即得（a）。如取$\delta<\frac{\varepsilon}{2\lambda}$，则当$P(A)<\delta$时，由（2）即得（$b$）。

充分性：对任给$\varepsilon>0$，取$\delta>0$使条件（b）成立。于是当$\lambda>\frac{1}{\delta}\sup\limits_{x\in\mathscr{H}}E|x|$时，我们有

$$P(|x|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}E|x|<\delta,\quad x\in\mathscr{H},$$

因而据条件（b）对一切$x\in\mathscr{H}$，

$$\int_{(|x|\geqslant\lambda)}|x|P(d\omega)<\varepsilon,$$

这表明$\mathscr{H}$一致可积。

引理　（i）如$x_n\to x$　a.e.则对任一$r>0$，

$$E|x|^r\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E|x_n|^r;$$

(ii) 如对某$r>0$，$E|x_n-x|^r\to0$且$E|x|^r<\infty$，则

$$E|x_n|^r\longrightarrow E|x|^r.$$

证明　（i）由Fatou引理

$$\int_\Omega|x|^rP(d\omega)=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}|x_n|^rP(d\omega)$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega|x_n|^rP(d\omega).$$

(ii) 如$r>1$，因$x=x_n+(x-x_n)=x_n-(x_n-x)$，则由明科夫斯基不等式知

$$\{E|x_n|^r\}^{1/r}-\{E|x_n-x|^r\}^{1/r}\leqslant\{E|x|^r\}^{1/r}$$
$$\leqslant\{E|x_n|^r\}^{1/r}+\{E|x_n-x|^r\}^{1/r}.$$

令$n\to\infty$，即知$E|x_n|^r\to E|x|^r(n\to\infty)$。

如$0<r\leqslant1$，由不等式$|x+y|^r\leqslant|x|^r+|y|^r$得

$$E|x_n|^r-E|x-x_n|^r\leqslant E|x|^r\leqslant E|x_n|^r+E|x-x_n|^r.$$

令$n\to\infty$，同样得$E|x_n|^r\to E|x|^r(n\to\infty)$。

定理2　设$0<r<\infty$，$E|x_n|^r<\infty$，且$\{x_n\}$依概率收敛到x，则下列各条件等价：

（i）$\{|x_n|^r,\ n\geqslant1\}$一致可积；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}E|x_n-x|^r=0$且$E|x|^r<\infty$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}E|x_n|^r=E|x|^r<\infty$。

证明　（i）⇒(ii) 由假设存在子列$\{n_k\}$使$x_{n_k}\to x$　a.e.。

由引理及定理1知$E|x|^r<\infty$。由不等式

$$|x_n-x|^r\leqslant 2^r(|x_n|^r+|x|^r),\quad r>0$$

及定理1即知$\{|x_n-x|^r,\ n\geqslant 1\}$一致可积。故对任给$\varepsilon>0$，我们有

$$E|x_n-x|^r\leqslant\int_{(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)}|x_n-x|^r P(d\omega)+\varepsilon^r,\qquad(4)$$

由假设条件$P(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)\to 0$，因此，由定理1的（b）知，（4）的右方当$n$充分大时可小于$\varepsilon$，换言之，(ii) 成立。

(ii)⇒(iii) 由引理的第二部份即知。

(iii)⇒(i) 令$\lambda>0$，定义连续函数$f(y)$，使它满足：

$$f(y)=\begin{cases}|y|^r, & \text{如}|y|^r\leqslant\lambda,\\ 0, & \text{如}|y|^r\geqslant\lambda+1,\\ \leqslant|y|^r, & \text{如}\lambda<|y|^r<\lambda+1.\end{cases}$$

因$f(y)$连续，故$f(x_n)$依概率收敛到$f(x)$(见第一章§2)，因$f(y)$有界，所以$Ef(x_n)$收敛到$Ef(x)$，于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\int_{(|x_n|^r<\lambda+1)}|x_n|^r P(d\omega)&\geqslant\lim_{n\to\infty}Ef(x_n)\\&=Ef(x)\\&\geqslant\int_{(|x|^r\leqslant\lambda)}|x|^r P(d\omega),\end{aligned}\qquad(6)$$

又因 (iii)，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|x_n|^r P(d\omega)=\int_\Omega|x|^r P(d\omega).\qquad(7)$$

由（6），（7）得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_{(|x_n|^r>\lambda+1)}|x_n|^r P(d\omega)\leqslant\int_{(|x|^r>\lambda)}|x|^r P(d\omega).\qquad(8)$$

（8）式右方与n无关，且当$\lambda\to\infty$时其值趋于零。从而对任给

$\varepsilon>0$，存在λ_0及N，使得当$\lambda>\lambda_0$时

$$\sup_{n>N}\int_{(|x_n|^r\geqslant\lambda+1)}|x_n|^r P(d\omega)<\varepsilon, \qquad (9)$$

但$E|x_k|^r<\infty$，$k\geqslant 1$，故可选取充分大的λ_1，使得当$\lambda>\lambda_1$时，有

$$\sup_{1\leqslant n\leqslant N}\int_{(|x_n|^r\geqslant\lambda+1)}|x_n|^r P(d\omega)<\varepsilon, \qquad (10)$$

从而只要$\lambda>\max\{\lambda_0, \lambda_1\}$，就有

$$\sup_{n\geqslant 1}\int_{(|x_n|^r\geqslant\lambda+1)}|x_n|^r P(d\omega)<\varepsilon.$$

换言之，$\{|x_n|^r, n\geqslant 1\}$一致有界。

参考书目

〔1〕 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

〔2〕 K. L. Chung, Lectures from Markov Processes to Brownian Motion, Springer-Verlag, 1982.

〔3〕 S. Karlin, H. M. Taylor, A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1981.

〔4〕 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

〔5〕 D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations, John Wiley and Sons, 1979.

〔6〕 N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, 1981.

〔7〕 复旦大学编 概率论第三册．人民教育出版社，1981.

〔8〕 K. L. Chung, A Course in Probability Theory, Second Edition, Academic Press, New York, 1974.